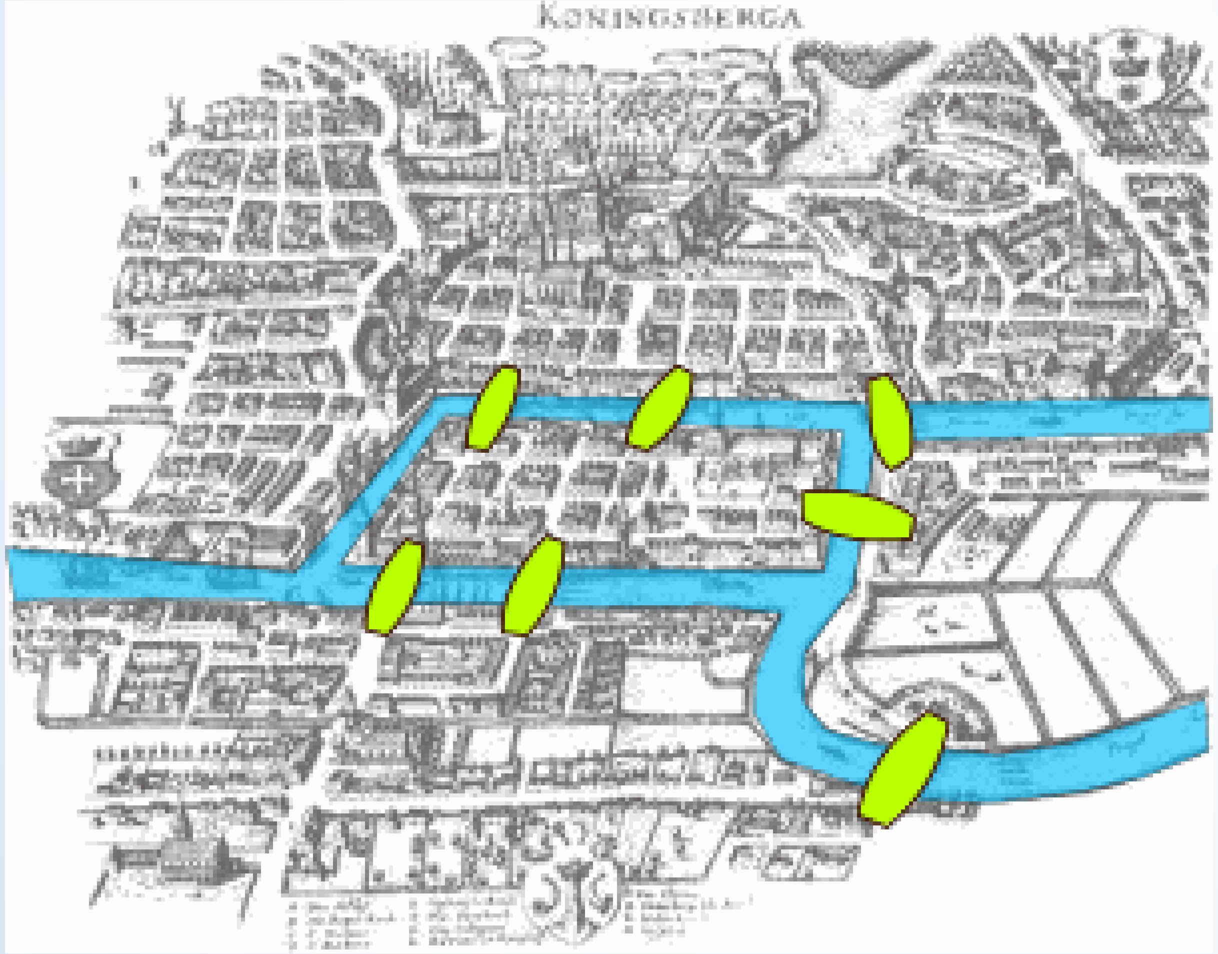
n筆書き

愛知県立豊田西高等学校
SS科学部数学班　代表生徒

内容

Ⅰ.動機

ケーニヒスベルクの橋

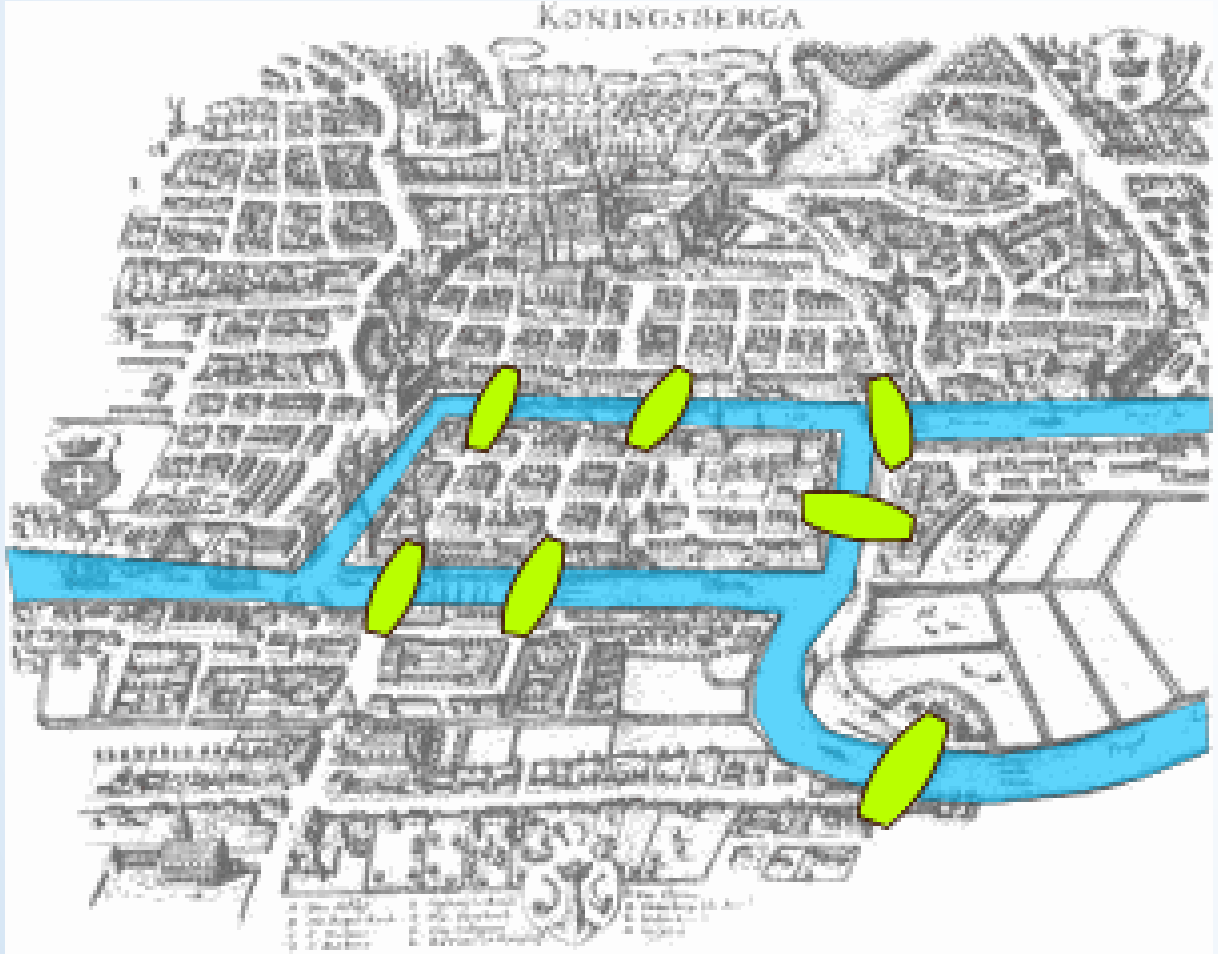


問：すべての橋をちょうど一回通って元の場所に戻れる？
(一筆書きの問題)

答：不可能(オイラーが証明)

Ⅰ.動機

ケーニヒスベルクの橋



一筆書きはできないが、二筆書きはできる

疑問
すべての図形で規則性はある?
(以下n筆書きと呼ぶ)

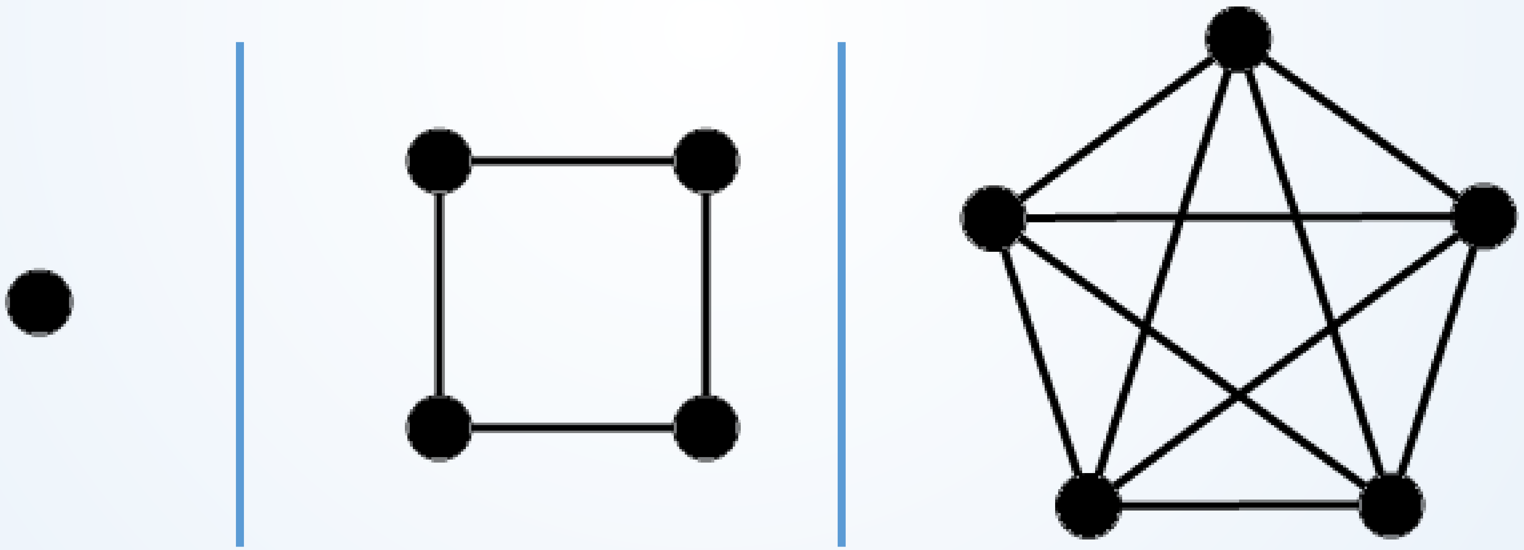
内容

I. 動機
II. 用語説明
III. 研究内容
    a. n筆書きのnを求める
    b. n筆書き問題の解法の考察
IV. 今後の展望
V. 参考文献等

Ⅱ.グラフ理論の用語説明

グラフG：点集合Vと辺集合Eからなる図形全般のこと。

連結グラフ：グラフのうち、全ての点が辺で結ばれているもの。

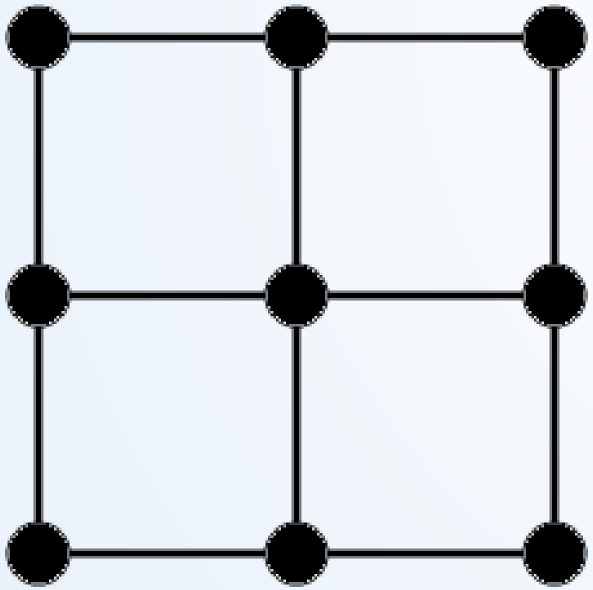


上3つはすべて連結グラフ

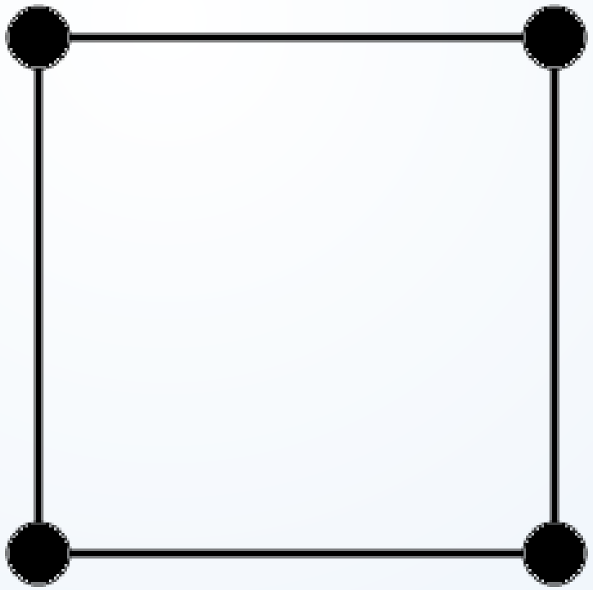
Ⅱ.グラフ理論の用語説明

部分グラフ:あるグラフの点と辺を部分的にとったグラフ

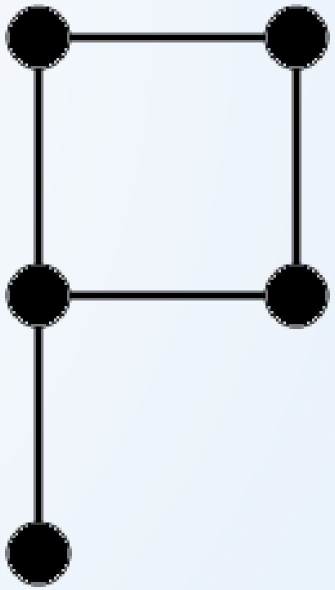
グラフG



グラフ G の部分グラフの例



例1



例2

Ⅱ.グラフ理論の用語説明

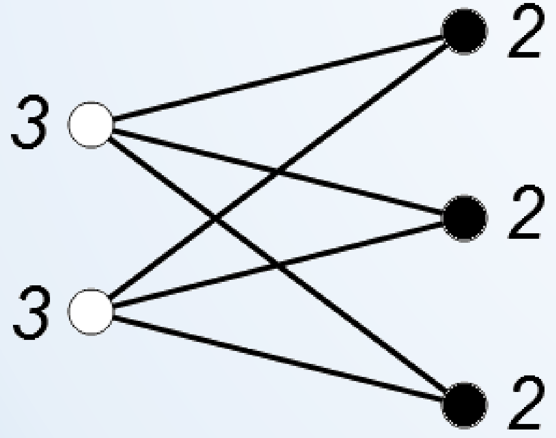
点の次数:点から出ている辺の本数。

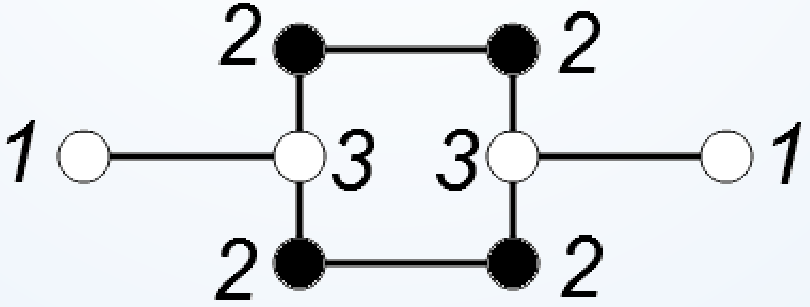
奇点:次数が奇数の点。

偶点:次数が偶数の点。

一つのグラフ内に奇点は偶数個ある(握手補題)。

(以下、○を奇点、●を偶点とする)



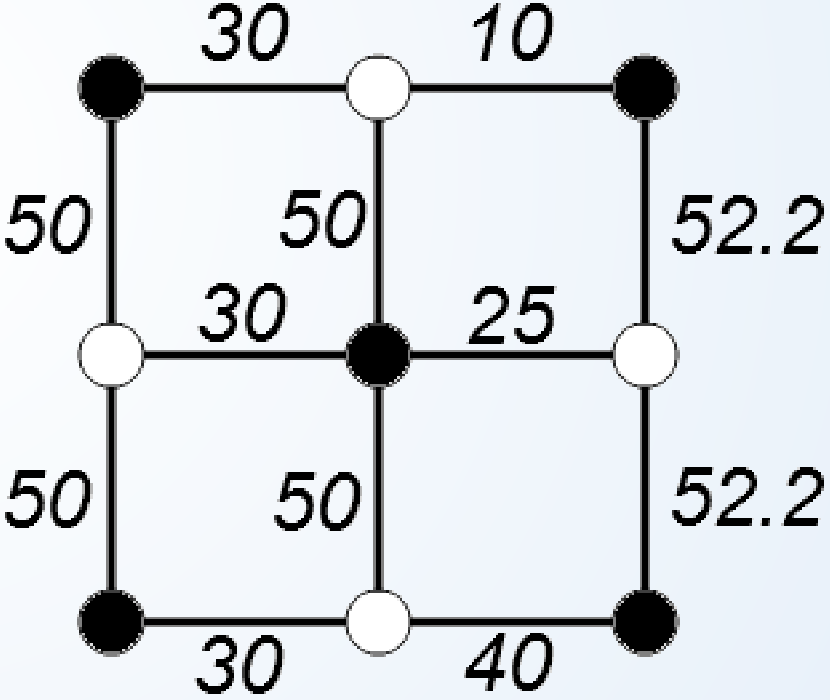


(数字が点の次数)

Ⅱ.グラフ理論の用語説明

辺の重み：辺につけられた値。距離や移動時間を表せる。

グラフ化



地図

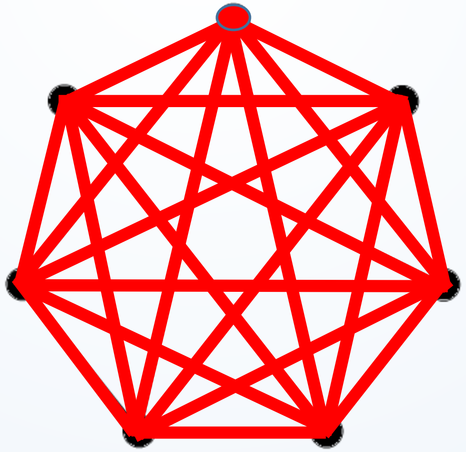
数字が辺の重み(今回は長さ)

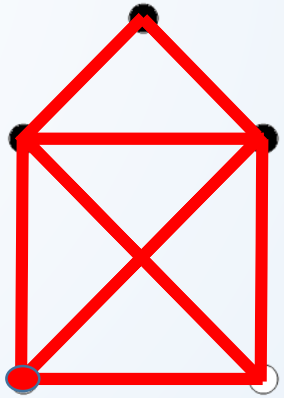
Ⅱ.グラフ理論の用語説明

一筆書きができる条件

一筆書きができるグラフ ⇔ すべての点が偶点または、奇点が2つのみ

一筆書きができる例





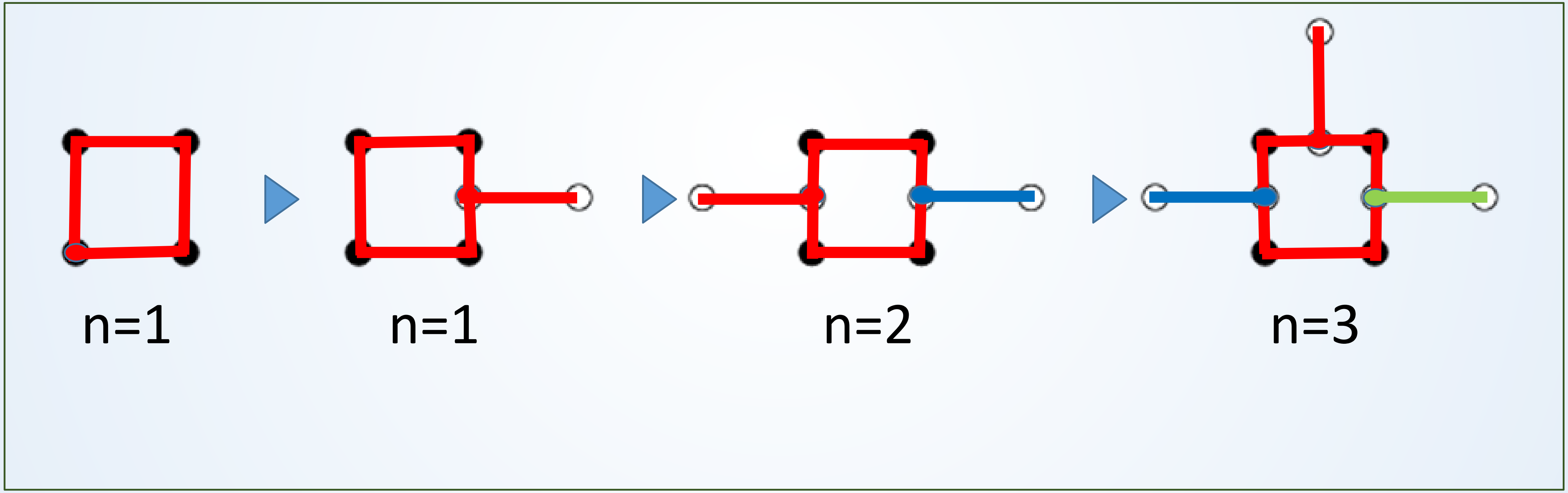
奇点2つの場合、その2点が始点・終点になる

内容

I. 動機
II. 用語説明
III. 研究内容
    a. n筆書きのnを求める
    b. n筆書き問題の解法の考察
IV. 今後の展望
V. 参考文献等

Ⅲ.a　n筆書きを考える

正方形に辺を1本ずつつなげて奇点を増やしていく

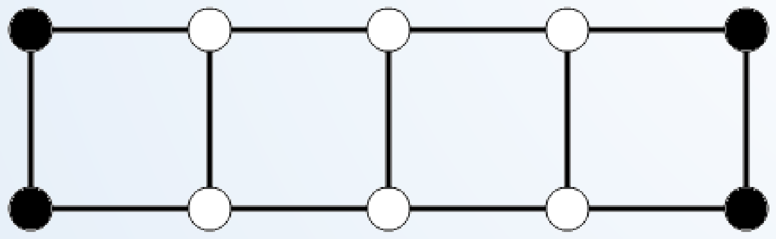


→奇点が2つ増えるごとにnが1ずつ増え、nは奇点の数÷2と予想

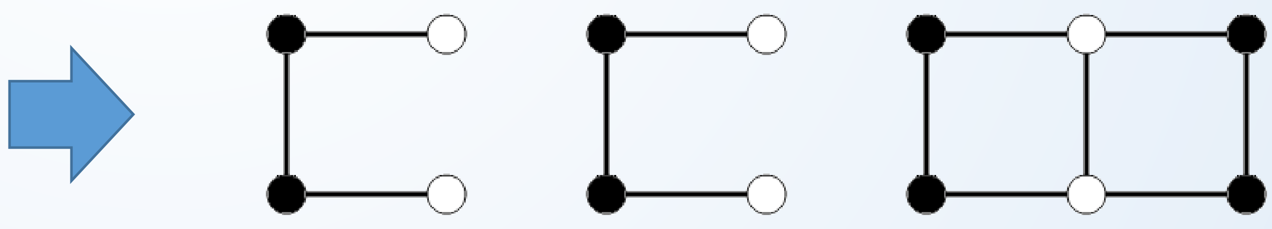
・証明の概略

命題)n筆書きのnは、奇点の数÷2で表せる。
証明)

- n筆書きができる⇔n個の一筆書きができるグラフに分けられる
- 一筆書きができるグラフは奇点を2つまで持つことができる
- 初めの奇点の数を2a個とすると、a個の一筆書きができるグラフに分割できるため、奇点の数÷2=n筆書きのnである



奇点が2n個



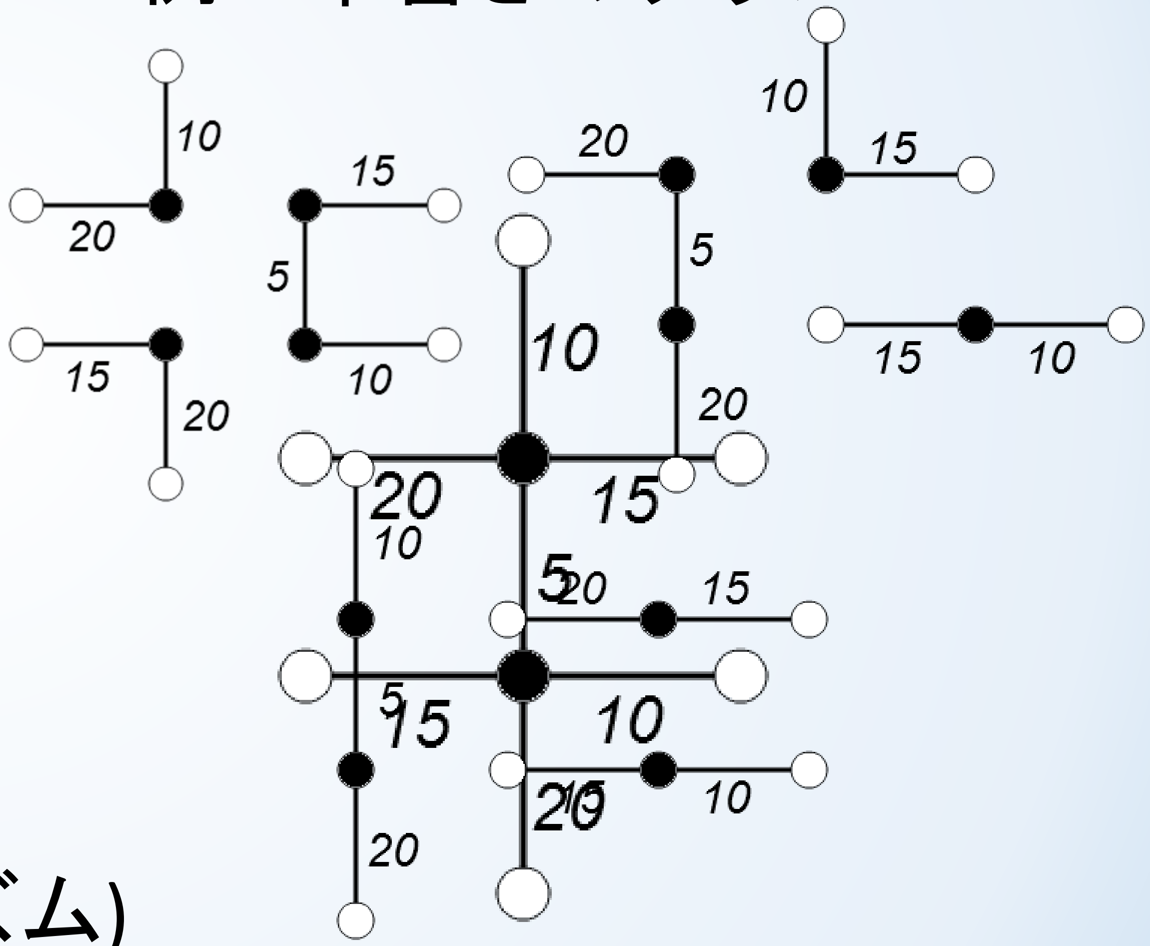
n個の奇点2個(一筆書き)のグラフ

Ⅲ.b　n筆書き問題を作成

１．n筆書きができる重み付きのグラフ(または地図)を与える。
２．それをn個の一筆書きができる部分グラフに分割する。
３．このとき、それぞれの部分グラフとの重みをできるだけn等分に近いように分けるには、どうすればよいか。

→効率よく求められる手順(アルゴリズム)を考える。

例:3筆書きのグラフ



分割方法の例

アルゴリズム論について

nの入力を与えたときにかかる計算時間(k,l :定数)

小　→　大

線形時間　O(n)　　多項式時間　O(n^k)　|　指数時間　O(l^n)

(例)　O(n^3)　|　(例)　O(2^n)

この範囲で実行できるアルゴリズムが好まれる

→最適解はこの時間で求まる？

今回用いた考え方

①総当たり
②貪欲法
③局所探索法

①総当たり

・奇点が2n個のグラフを考えたとして、
2n個の奇点を2つずつに分ける組合せが

$$\frac{\frac{(2n)!}{2!\cdot n}}{n!} = \frac{(2n-1)!}{n!}$$ 通り

このそれぞれについて、
辺の選び方も複数あるため、
多項式時間を超える計算量と予想

→近似アルゴリズム(最適解ではないが、できるだけ近い解が出せるような手順)を考える

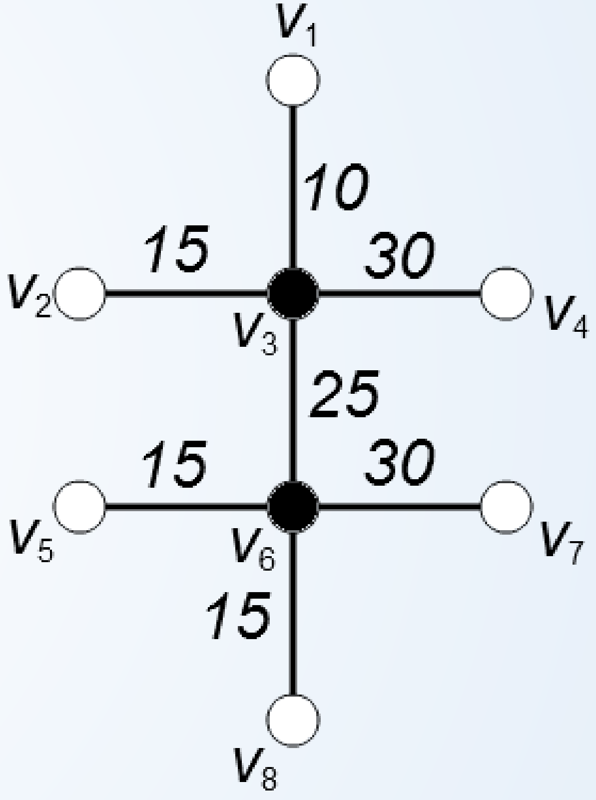
②貪欲法

・貪欲法とは

　　アルゴリズムの考え方の一つで、部分的な最適解を積み重ねていき最終的に一つの解としてまとめる。

②貪欲法

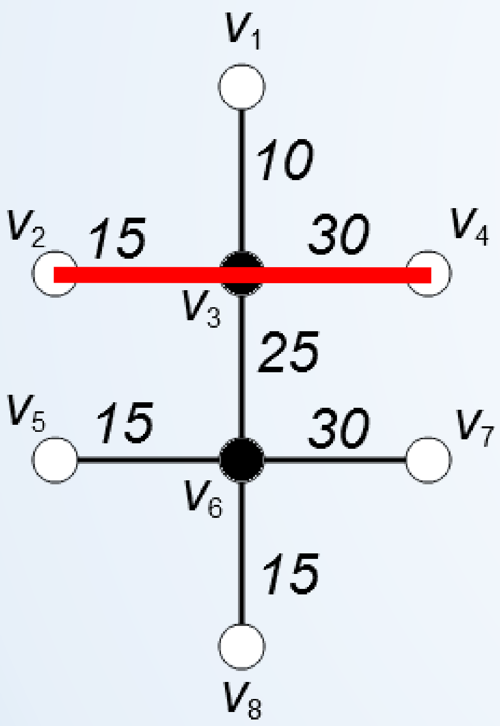
実行例と考察

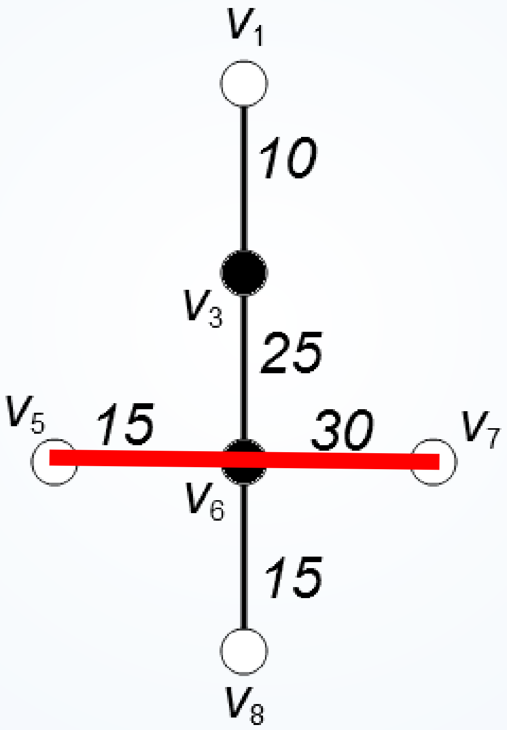


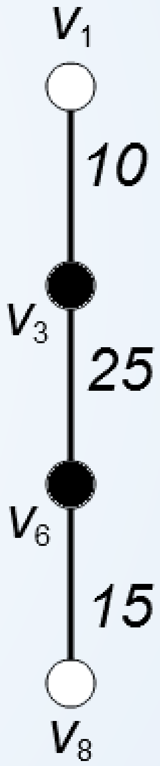
最適値α_1 $\frac{140}{3} \fallingdotseq 47$

②貪欲法

実行例と考察







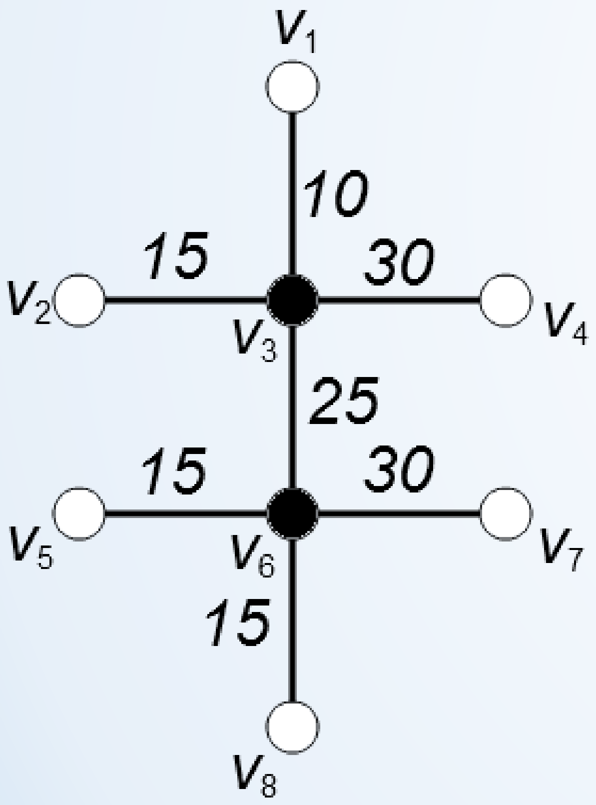
最適値α_1 $\frac{140}{3} \fallingdotseq 47$

最適値α_2 $\frac{95}{2} = 47.5$

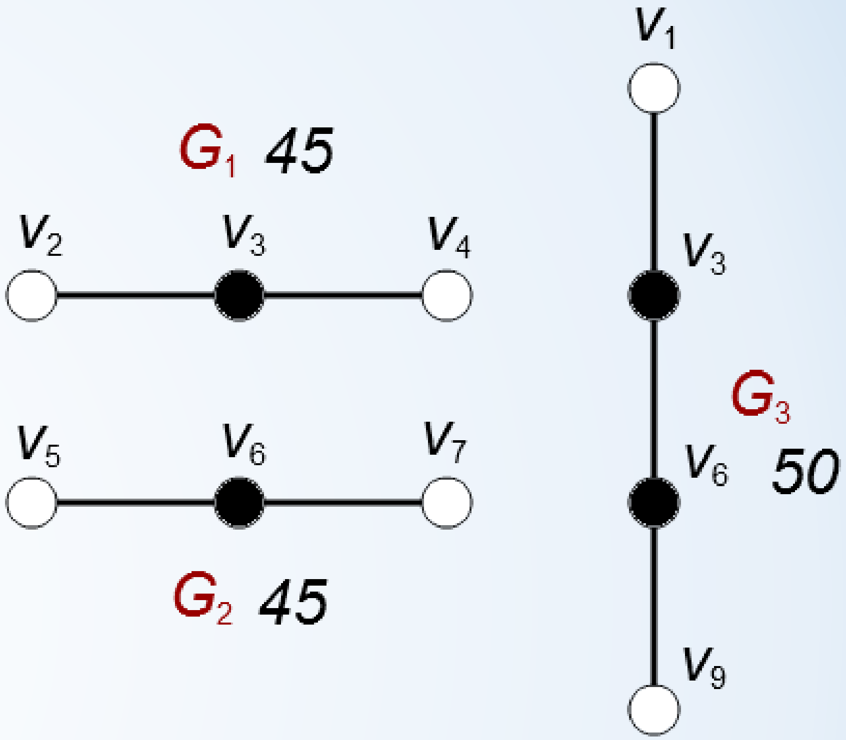
終了

②貪欲法

実行例と考察



	v_1	v_2	v_4	v_5	v_7	v_8
v_1	-	25	40	50	65	50
v_2	25	-	45	55	70	55
v_4	40	45	-	70	85	70
v_5	50	55	70	-	45	30
v_7	65	70	85	45	-	45
v_8	50	55	70	30	45	-



45+45+50に分割

・考察

貪欲法を用いて、求めやすくなった。今回は最適解が出ているが、グラフが複雑になるにつれて近似精度が悪くなると予想している。

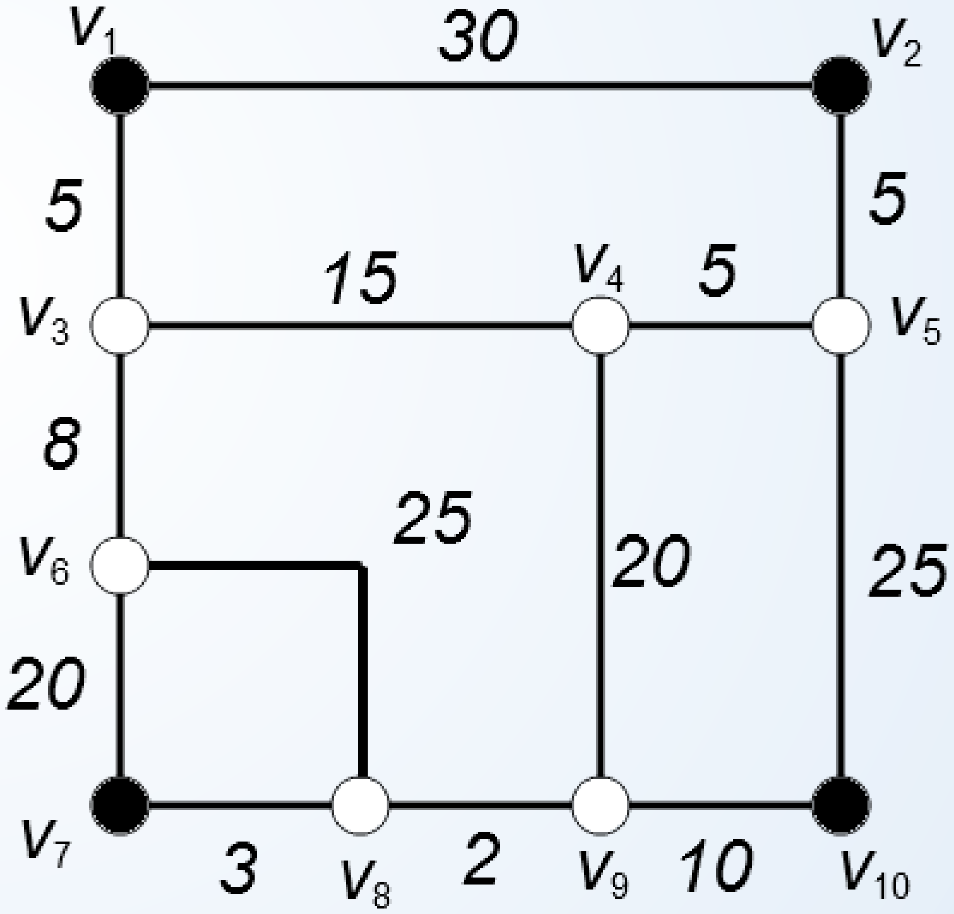
③局所探索法

・局所探索法とは

　アルゴリズムの考え方の一つで、適当(ランダム)に解を一つ求めた後、決められた条件で解をこれ以上改善できなくなるまで改善することで、局所解が求められるという方法。

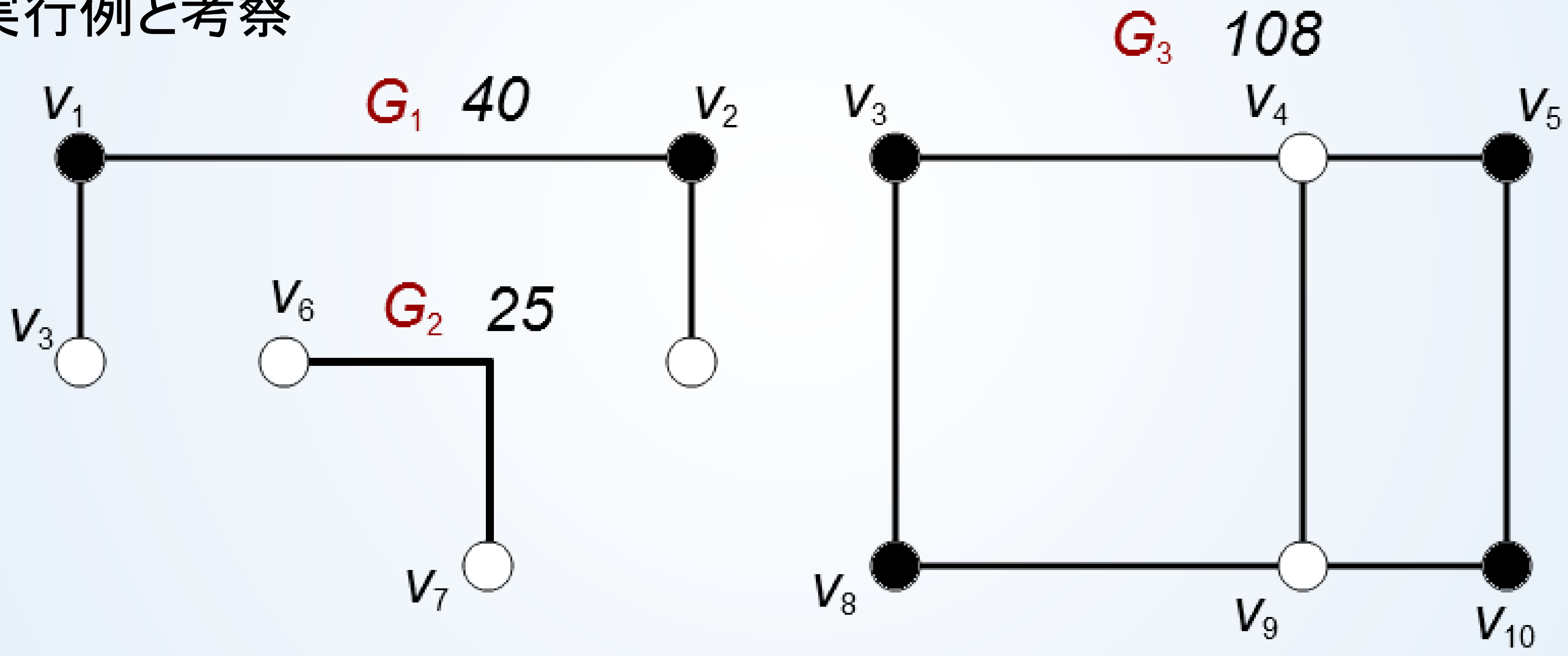
③局所探索法

実行例と考察



③局所探索法

実行例と考察

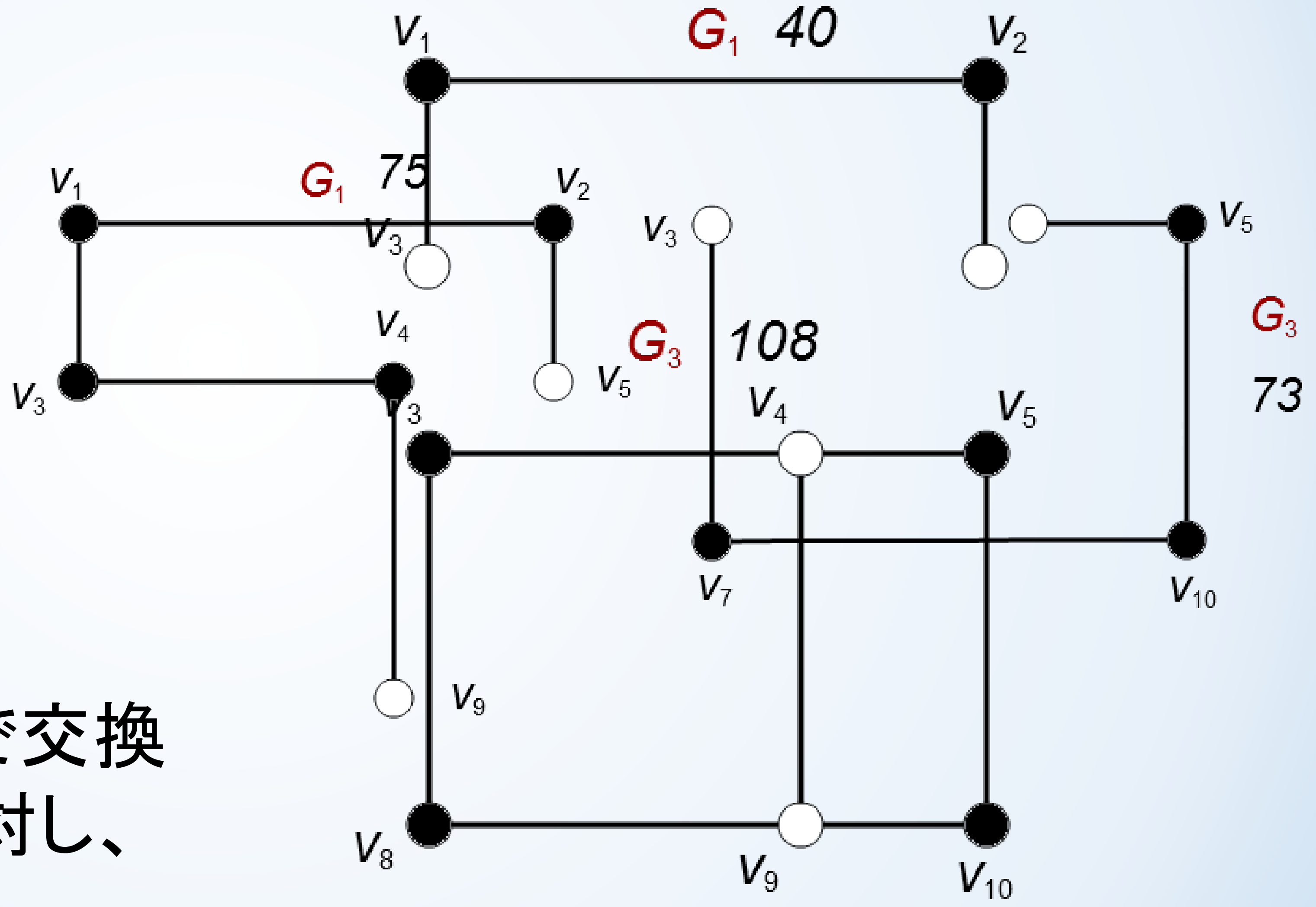


ランダム解

③局所探索法

実行例と考察

	G_1	G_2	G_3
G_1	-	不可能	35
G_2	不可能	-	31
G_3	35	31	-



変更(ループ)一回目

G_1とG_2は交換不可

G_1とG_3はd=34に対し、35で交換

その後、G_2とG_3はd=24に対し、31で交換できた。

③局所探索法

実行例と考察

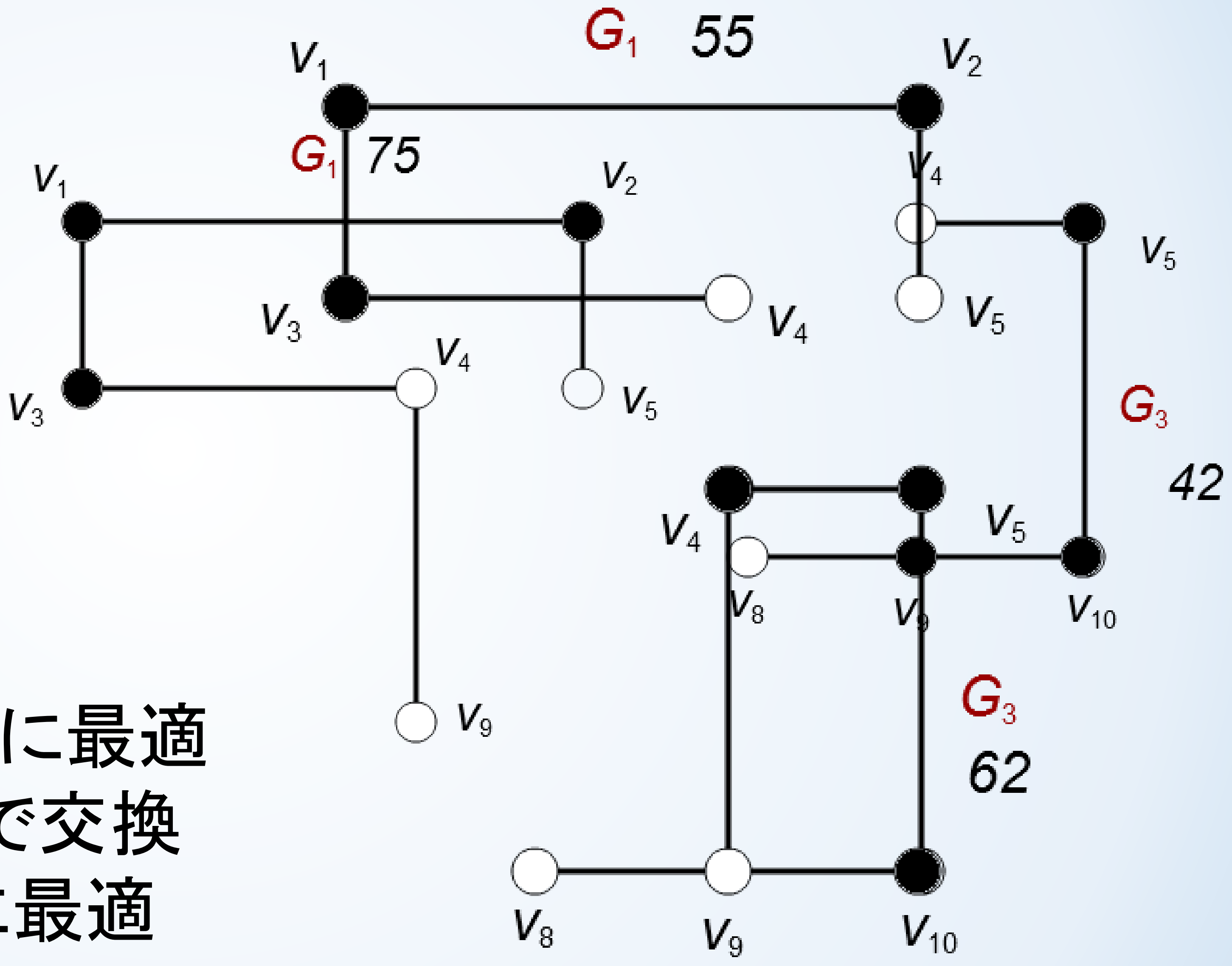
	G_1	G_2	G_3
G_1	-	最適	20
G_2	最適	-	最善
G_3	20	最善	-

*変更(ループ)*二回目

G_1とG_2はd=9.5に対し、すでに最適

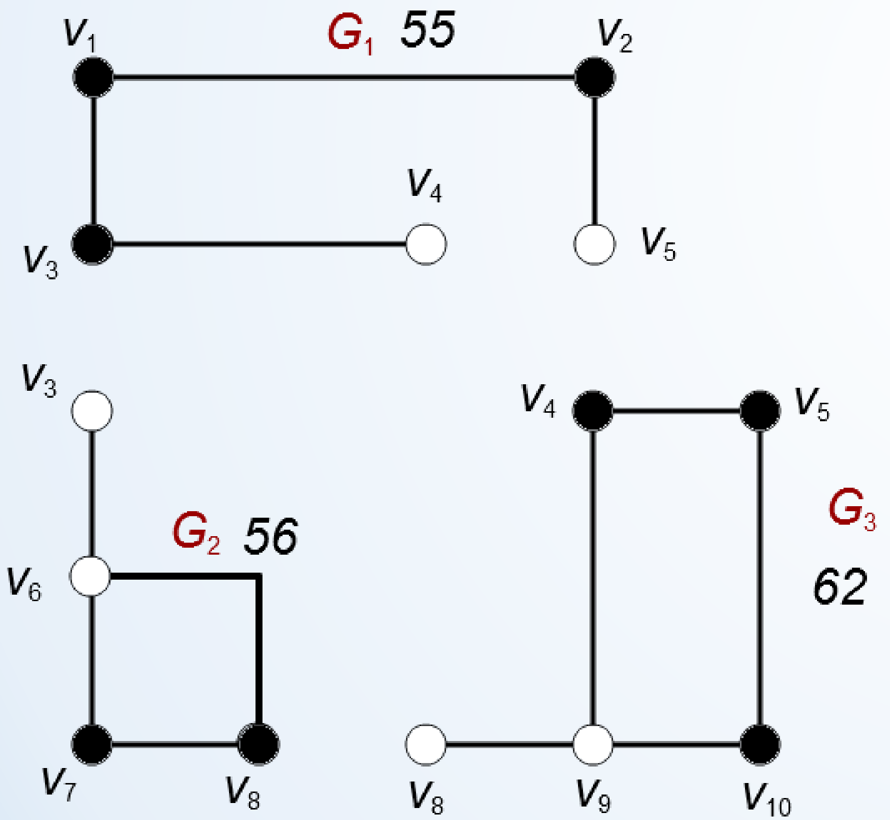
G_1とG_3はd=16.5に対し、20で交換

G_2とG_3はd=3に対し、すでに最適



③局所探索法

実行例と考察



3回の変更(ループ)を経て、
55+56+62に分割
(ランダム解は108+40+25)

・考察
　局所探索法は理解しやすかったり、手計算が貪欲法よりやりやすいという利点がある。初め、重みがランダムに分かれているという点に着目して操作を改善しようと考えている。

解法のまとめ

方法	解の精度	計算量
①総当たり	最適解	多項式時間を超えると予想
②貪欲法	近似解	不明
③局所探索法	近似解	不明

ⅳ.今後の課題･展望

- C言語等を利用したコンピュータでの実装
  - 複雑なグラフのときの近似解が計算できていない
- より実践的にする工夫
  - 有向グラフで考える
  - 近似アルゴリズムの近似率を考える
- 他に改変して利用できそうなアルゴリズムの考察
- 問題の細かい定義をし、現実の問題へ反映させる

Ⅴ.参考文献･ソフト

- 仁平政一･西尾義典, 2005,「グラフ理論|序説」, プレアデス出版
- 茨木俊秀･石井利昌･永持仁, 2010,「グラフ理論連結構造とその応用」, 朝倉書店
- 浅野哲夫･和田幸一･増澤利光, 2003,「アルゴリズム論」, オーム社
- Wikipedia　中国人郵便配達問題

  URL　https://ja.wikipedia.org/wiki/中国人郵便配達問題
- FG Draw　グラフ描写ソフト

  URL　http://www.vector.co.jp/soft/winnt/art/se500198.html