２年生ＳＳ数学

＜直線・平面・球の方程式＞

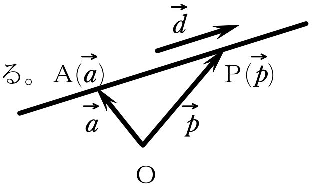
愛知県立豊田西高等学校

２年（　）組（　）番　名前（　　　　　　　　　　）

２年生ＳＳ数学　＜直線・平面・球の方程式＞

目次

１．空間における直線の方程式



[1]定点A$(\vec{a})$を通り、$\vec{0}$でないベクトル$\vec{d}$に平行な直線をｇとする。

この直線ｇ上の動点を$P(\vec{p})$とすると、ｔを実数として

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d} \qquad \cdots①$$

と表せる。①を直線 ｇのベクトル方程式といい、tを媒介変数、$\vec{d}$を直線gの方向ベクトルという。

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{p}=(x,y,z)$, $\vec{d}=(l,m,n)$として①の両辺の各成分を比較すれば、

$$x=x_1+lt$$
$$y=y_1+mt$$
$$z=z_1+nt$$

（tは媒介変数）

と表せる。

点A(x_1,y_1,z_1)を通り、$\vec{d}=(l,m,n)$を方向ベクトルとする直線の方程式は

$l\neq0,\ m\neq0,\ n\neq0$のとき　$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$

$l\neq0,\ m\neq0,\ n=0$ のとき　$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}$, $z=z_1$

$l\neq0, m=0, n=0$ のとき　$y=y_1$, $z=z_1$

である。

問１　点$(3,-2,4)$を通り、次のベクトルを方向ベクトルとする直線の方程式を求めよ。

⑴　$(2,-1,3)$　　⑵ $(1,-1,0)$

問２　点$(5,-3,0)$を通り、次の直線に平行な直線の方程式を求めよ。

$$x-2=\frac{y-5}{3}=\frac{4-z}{6}$$

[2] 2点 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ を通る直線

この直線の方向ベクトルは、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$であるから

$x_2 \neq x_1$，$y_2 \neq y_1$, $z_2 \neq z_1$ のとき2点 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ を通る直線は

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

問３　次の2点を通る直線の方程式を求めよ。

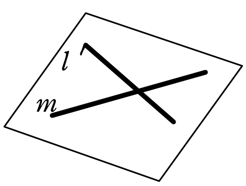
(1) $(1,2,3)$, $(-4,5,6)$　　(2) $(4,5,-7)$, $(-3,0,2)$

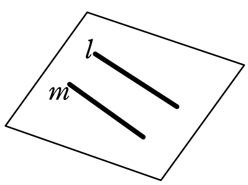
(3) $(0,0,0)$, (a,b,c) （ただし $abc \neq 0$）

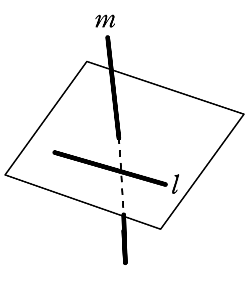
2直線の位置関係

異なる2直線の位置関係は、次の3つの場合がある。

[1] 1 点で交わる　　[2]平行である　　[3]ねじれの位置にある







2直線l,mが並行であるとき、$l//m$ と書く。

ねじれの位置にある場合、2直線のなす角は、任意の1点Oを通るl,mに平行な2直線l',m'のなす角に等しい。この角は、点Oのとり方によらず一定である。

例題1　次の方程式で表される2直線のなす角を求めよ。

l: $x=-2+3t,\ y=3-3t,\ z=2+3\sqrt{2}\,t$　m: $x=1+2t,\ y=2t,\ z=-2-2\sqrt{2}\,t$

$\boxed{\text{問4}}$　次の方程式で表される2直線のなす角を求めよ。

$$\frac{x}{-1}=z,\ y=1 \quad , \quad \frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$$

例題2

次の2直線の両方に直交する直線の方程式を求めよ。

l：$x-1=y+2=z$，　m：$x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$

$\boxed{\text{問5}}$　次の2直線の両方に直交する直線の方程式を求めよ。

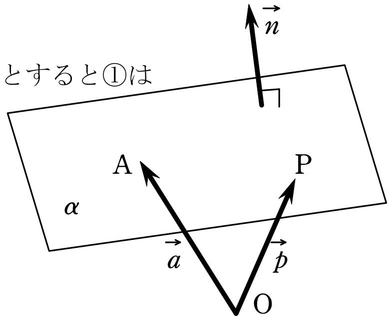
$$l:\ \frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{2}=-z,\quad m:\ \frac{x+1}{2}=\frac{4-y}{2}=z-2$$

2　平面の方程式

空間において、定点A($\vec{a}$)を通り、$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面αの方程式は、平面α上の任意の点を$P(\vec{p})$ とすると$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$ または$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$であるから

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0 \quad \cdots①$$

である。ここで$\vec{p}=(x,y,z)$, $\vec{a}=(x_1 , y_1 , z_1)$, $\vec{n}=(a,b,c)$ とすると①は



$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

またこれを展開すると

$$ax+by+cz-ax_1-by_1-cz_1=0$$

$d=-ax_1-by_1-cz_1$とおくと

$$ax+by+cz+d=0$$

となる。

点A(x_1 , y_1 , z_1)を通り、$\vec{n}=(a,b,c)$を法線ベクトルとする平面の方程式は
$\boldsymbol{a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0}$

$\vec{n}=(a,b,c)$を法線ベクトルとする平面の方程式は
$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0}$　　　　:空間における平面の方程式の一般形

問６　2点A(1,2,3) , B(3,−1,1)について、点Aを通り、$\overrightarrow{AB}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

例題3

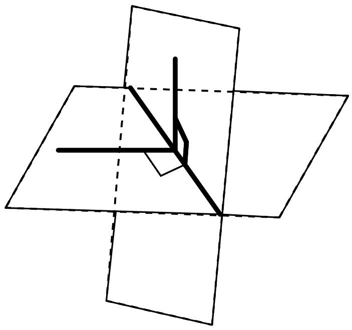
3点A$(6,0,0)$, B$(9,0,2)$, C$(0,3,2)$ を通る平面の方程式を求めよ。

$\boxed{問7}$ 原点と$(-1,0,1)$, $(0,4,3)$を通る平面の方程式を求めよ。

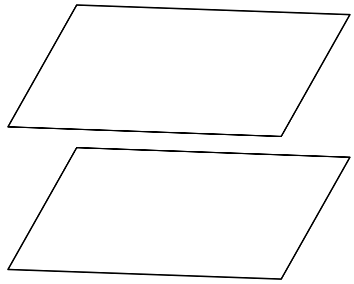
2平面の位置関係

異なる2平面の位置関係には、次の２つの場合がある。

[1]交わる



[2]平行である



交わったときの共有する直線を2平面の交線という。
2平面が平行であるとき、$\alpha /\!/ \beta$と書く。

交わる２平面の交線上の点から、各平面上に、交線に垂直に引いた2直線のなす角を2平面のなす角という。２平面α、βのなす角が直角であるとき、α、βは垂直である、または直交するといい、$\alpha \perp \beta$と書く。

例題４
2平面　$2x-2y=-1$,　$x-3y+\sqrt{6}\,z=1$のなす角θを求めよ。

$\boxed{\text{問8}}$ 2平面 $2x+y+3z=1$, $3x-2y+z=7$ のなす角を求めよ。

$\boxed{\text{問9}}$ 2平面 $2x+y+kz=2$, $-2x-(k+2)y+3z=1$ が垂直になるように定数kの値を定めよ。

3　平面の方程式と直線の方程式の融合

点A(x_1,y_1,z_1)を通り、$\vec{d}=(l,m,n)$を方向ベクトルとする直線の方程式は

$l\fallingdotseq 0,\ m\fallingdotseq 0,\ n\fallingdotseq 0$のとき　$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$

である。

この直線の方向ベクトル $\vec{d}=(l,m,n)$ が、この直線に垂直な平面

$l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$　　(通る点(x_1,y_1,z_1))

の法線ベクトルとなる。

例題５

点$(1,-2,5)$ を通り、直線$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=z-4$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

例題６

直線 $l: x-1=y-1=\dfrac{z-4}{4}$ と平面 $\alpha: 2x+6y-3z-12=0$ の交点Pの座標を求めよ。

$\boxed{問10}$ 直線 $l:\dfrac{x+6}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{9}$ と平面 $\alpha:4x+2y+z-6=0$ の交点Pの座標を求めよ。

●点と平面の距離

点(x_o, y_o, z_o) と平面$ax+by+cz+d=0$ の距離は $\dfrac{|ax_o+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

平面$ax+by+cz+d=0$をαとする。点$\mathrm{P}(x_o, y_o, z_o)$ からαに下ろした垂線PHの長さを求める。Hの座標を(p,q,r)とすると

$\overrightarrow{PH}=(p-x_o, q-y_o, r-z_o)$

また $\vec{n}=(a,b,c)$ とすると$\overrightarrow{PH}/\!/\vec{n}$

$|\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}|=|\overrightarrow{PH}||\vec{n}|$だから

$|\overrightarrow{PH}|=\dfrac{|\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|a(p-x_0)+b(q-y_0)+c(r-z_o)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ここでHはα上にあるから

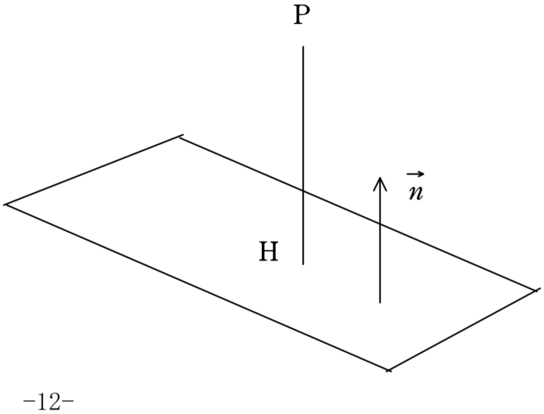
$ap+bq+cr+d=0$

よって

$ap+bq+cr=-d$

ゆえに

$|\overrightarrow{PH}|=\dfrac{|ax_o+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$



$\boxed{問１１}$点$(0,-1,0)$と$2x-y-2z=3$の距離を求めよ。

4　球の方程式

中心$C(\vec{c})$，半径 r の球面上の点を$P(\vec{p})$とすると

$|\vec{p}-\vec{c}|=r$

$\vec{p}=(x,y,z)$，$\vec{c}=(a,b,c)$とおくと

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

点(a,b,c)を中心とする半径rの球の方程式は$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$\boxed{問１２}$　(1)点$(1,3,-5)$を中心とする半径２の球面の方程式を求めよ。

(2)２点$(3,5,1)$，$(-1,3,-3)$を直径の両端とする球の方程式を求めよ。

例題7

球面$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$上の点A(5,4,2)におけるこの球の接平面の方程式を求めよ。

◎接平面…点Cを中心とする半径CAの球がある。点Aを通り半径CAに垂直な平面αをつくると平面αと球の共有点は点Aのみである。平面αをこの球の接平面という

問13　球面$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9$上の点(1,2,2)における接平面の方程式を求めよ。

5　外積

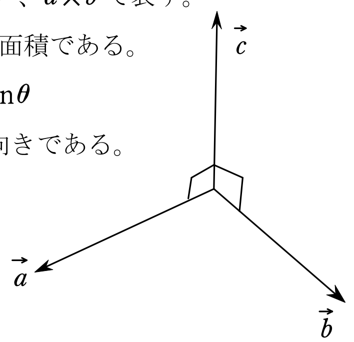
●外積の定義

次の性質をもつベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積といい、$\vec{a}\times\vec{b}$ で表す。

○　$\vec{c}$ の大きさは $\vec{a}$ と $\vec{b}$を1辺とする平行四辺形の面積である。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角θとすると　$S=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$

○　$\vec{c}$ の方向は $\vec{a}$ と $\vec{b}$の両方に垂直で図のような向きである。



外積の性質

i)　$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

ii)　$(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b})$　　（kは実数）

iii)　$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

例

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$、$\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ とすると、$\vec{a}$、$\vec{b}$の作る平行四辺形はｘｙ平面上の1辺の長さ１の正方形であり、面積は１である。$\vec{a}$と$\vec{b}$の両方に垂直な方向はｚ軸の方向であり、向きはｚ軸の正の向きだから、

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

である。

(2) $\vec{a}$と$\vec{b}$の少なくとも一方が$\vec{0}$のとき、または$\vec{a}/\!/\vec{b}$のとき、$\vec{a}\times\vec{b}$ の方向は定まらないが大きさは０である。

よって$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

である。

●成分計算

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}、\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$ とし、$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$、$\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$、$\vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とする。

このとき

$\vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{e_3}$ ，$\vec{e_2}\times\vec{e_3}=\vec{e_1}$，$\vec{e_3}\times\vec{e_1}=\vec{e_2}$

$\vec{e_2}\times\vec{e_1}=-\vec{e_3}$ ，$\vec{e_3}\times\vec{e_2}=-\vec{e_1}$，$\vec{e_1}\times\vec{e_3}=-\vec{e_2}$

$\vec{e_1}\times\vec{e_1}=\vec{e_2}\times\vec{e_2}=\vec{e_3}\times\vec{e_3}=\vec{0}$

ここで、

$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$ ，$\vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3}$

とあらわせるので、

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=a_1b_2(\vec{e_1}\times\vec{e_2})+a_1b_3(\vec{e_1}\times\vec{e_3})+a_2b_1(\vec{e_2}\times\vec{e_1})+a_2b_3(\vec{e_2}\times\vec{e_3})+a_3b_1(\vec{e_3}\times\vec{e_1})\\&\qquad+a_3b_2(\vec{e_3}\times\vec{e_2})\\&=a_1b_2\vec{e_3}+a_1b_3(-\vec{e_2})+a_2b_1(-\vec{e_3})+a_2b_3\vec{e_1}+a_3b_1\vec{e_2}+a_3b_2(-\vec{e_1})\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{e_1}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{e_2}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{e_3}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

行列式を使うと

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

と表すことができる。

例題８

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$の両方に垂直なベクトルのひとつを求めよ。

解）$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times(-2)-1\times3\\3\times3-(-2)\times1\\1\times1-3\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\11\\-5\end{pmatrix}$

よって$\begin{pmatrix}-7\\11\\-5\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{問１４}}$　$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix}$の両方に垂直なベクトルのひとつを求めよ。

● 空間内の平面～外積の利用～

空間内に同一直線上にはない3点A,B,Cがあり、この3点を含む平面を平面αとする。今、平面α上に任意の点Pをとったとき、

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$　　（ｓ、ｔ：実数）

と表すことができる。

また、$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$だから

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$　　（ｓ、ｔ：実数）

である。

例題9
3点A(6,0,0)、B(9,0,2)、C(0,3,2)　について、A,B,Cを通る平面の方程式を求めよ。

解）$\overrightarrow{AB}=(3,0,2)$、$\overrightarrow{AC}=(-6,3,2)$

平面αの法線ベクトルを$\vec{n}$とすると

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-6\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-18\\9\end{pmatrix}$$

よってαは

$-6(x-6)-18y+9z=0$

$2x+6y-3z-12=0$

$\boxed{\text{問15}}$　3点A(4,0,0)、B(2,0,3)、C(0,−1,4)　を通る平面の方程式を求めよ。

$\boxed{\text{例題１}}$

解）２直線l,mの方向ベクトルをそれぞれ$\vec{u}$, $\vec{v}$ とすると

$\vec{u}=(3,-3,3\sqrt{2})$ $\vec{v}=(2,2,-2\sqrt{2})$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ のなす角をθとおくと

$$\cos\theta=\frac{3\times2+(-3)\times2+3\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})}{\sqrt{3^2+(-3)^2+(3\sqrt{2})^2)}\sqrt{2^2+2^2+(-2\sqrt{2})^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$より$\theta=120°$

よってなす角は$180°-120°=60°$

$\boxed{\text{例題２}}$

解）2直線l,m と求める直線との交点をA,Bとする。媒介変数s,tによって

A(s+1, s−2, s)，B(t, 2t, −t)

と表される。

$\overrightarrow{AB}=(\mathrm{t-s-1}, \mathrm{2t-s+2}, \mathrm{-t-s})$

$\overrightarrow{AB}\perp l$, $\overrightarrow{AB}\perp m$であるから$\overrightarrow{AB}$と$l, m$ の方向ベクトルの内積は

$(\mathrm{t-s-1})+(\mathrm{2t-s+2})+(\mathrm{-t-s})=0$

$(\mathrm{t-s-1})+2(\mathrm{2t-s+2})+(-1)(\mathrm{-t-s})=0$

式を整理すると

$\mathrm{2t-3s+1=0}$

$\mathrm{6t-2s+3=0}$

これを解くと　$\mathrm{s}=0$, $\mathrm{t}=-\frac{1}{2}$

よってA(１，－２，０), $\mathrm{B}(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$ $\overrightarrow{AB}=(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$

直線ABは　$\dfrac{x-1}{\frac{-3}{2}}=\mathrm{y}+2=\dfrac{z}{\frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{例題３}}$

解）求める平面の方程式を

$ax+by+cz+d=0$　…①

とおき、3点A,B,Cの座標を代入すると

$6a+d=0$, $9a+2c+d=0$, $3b+2c+d=0$

この3式を解くと

$a=-\frac{d}{6}$, $b=-\frac{d}{2}$, $c=\frac{d}{4}$

①に代入して

$$-\frac{d}{6}x-\frac{d}{2}y+\frac{d}{4}z+\mathrm{d}=0$$

a,b,cのうち少なくとも１つは０でないから、$d \fallingdotseq 0$

よって

$2x+6y-3z-12=0$

$\boxed{\text{例題４}}$

解）ベクトル$(2,-2,0)$，$(1,-3,\sqrt{6})$ はそれぞれの平面の法線ベクトルでこれらのなす角は

$$\cos\theta=\frac{2\times1+(-2)\times(-3)+0\times\sqrt{6}}{\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}\sqrt{1^2+(-3)^2+\sqrt{6}^{\,2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって$\theta=45°$

$\boxed{\text{例題5}}$

解）この直線は$\vec{d}=(2,-3,1)$ に平行だからベクトル$\vec{d}$に垂直で点$(1,-2,5)$を通る平面の方程式を求めればよい。よって

$2(x-1)-3(y+2)+(z-5)=0$

$2x-3y+z-13=0$

$\boxed{\text{例題６}}$

解）直線l上の点(x,y,z)は媒介変数tを用いて

$x=1+t$，$y=1+t$，$z=4+4t$

この点がα上にあるためには、代入して

$2(1+t)+6(1+t)-3(4+4t)-12=0$

$-4t-16=0$

$t=-4$

よって$(x,y,z)=(-3,-3,-12)$

$\boxed{\text{例題７}}$

解）　中心Cの座標は$(3,2,1)$であるから

$\overrightarrow{CA}=(2,2,1)$

点Aを通り$\overrightarrow{CA}$を法線ベクトルとする平面の方程式は

$2(x-5)+2(y-4)+1(z-2)=0$

よって　$2x+2y+z=20$

参考文献

＜高等学校教科用図書＞

(1) 高等学校数学科用　改訂　代数・幾何　東京書籍

(2) 高等学校数学科用　代数幾何［改訂版］　東京書籍

(3) 高等学校数学科用　数学 B　数研出版

＜参考書籍＞

(1) 永田雅宜　理系のための線形代数の基礎　紀伊國屋書店

(2) 高藤節夫　改訂　線形代数　大日本図書

(3) 清 史弘　駿台受験シリーズ　行列　駿台文庫

(4) 清 史弘　駿台受験シリーズ　ベクトル　駿台文庫

(5) 啓林館編集部　Focus Gold 数学 III＋C　啓林館

SS 数学β・SS 数学δ　教材
2014 年 11 月発行(第 1 版)
2016 年 11 月発行(第 2 版)
発行者
愛知県立豊田西高等学校　数学科
〒471-0035
愛知県豊田市小坂町 14－65
Tel 0565-31-0313
Fax0565-33-9417