ループという現象～コラッツ予想より～

愛知県立豊田西高校　２年　古川陽一

１．コラッツ予想とは

コラッツ予想とは、ドイツの数学者ローター・　コラッツによって唱えられた未解決問題である。その方法は、任意の自然数に対して、奇数であれば３をかけて１を足す、偶数であれば２で割るという操作で、どんな自然数も必ず１になるというものである。

ex)　ア）13→40→20→10→5→16→8→4→2→1

イ）24→12→6→3→10→5→16→8→4→2→1

２．研究の動機

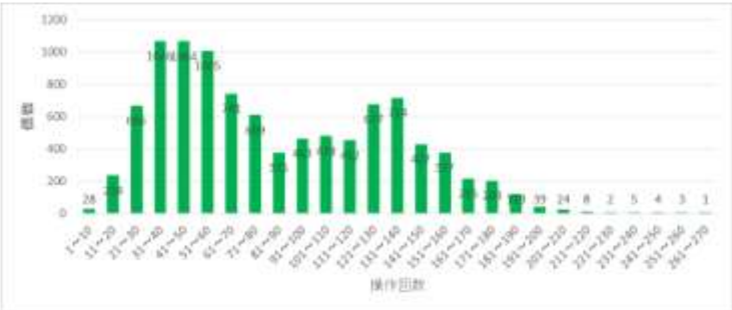
行う操作は単純な四則計算でありながら、世界中の数学者を悩ませる問題であることに興味を持ち、操作過程などから証明への糸口が無いかと考え、この研究を行うことにした。

３．研究の方針について

研究１：　コラッツ予想の操作において、ある自然数をｎとした時、「3n+1」という操作を、「5n+1」、「5n−1」、「7n+1」、「3n−1」に変化させて、どのような結果になるか調査した。

研究２：　ループについて多項式を用いて考えた。

４．研究１の結果・考察



①操作回数について

１から 10000 までの数について操作回数と数の個数の関係はこのグラフを見ると、30 回～50 回の操作回数で１になるものが最も多いことが分かる。また、回数別でみると、最も多かったのは 62 回で、１万個中 190 個の数が、62 回で操作を終えた。外れ値のような極端に操作回数が大きい回数は見られなかった。

②操作結果について

（ｉ）１になる

（ii）5 でループする (5→14→7→20→10→5)

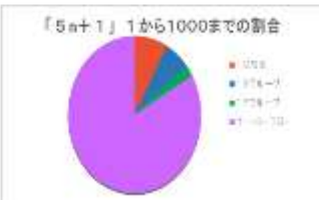
（iii）13 でループする（13→66→33→166→83→416→208→104→52→26→13)

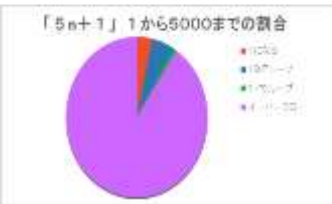
（iv）17 でループする（17→86→43→216→108→54→27→136→68→34→17)

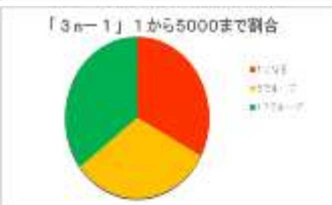
（ｖ）計算過程で 10 億を超える（オーバーフローする）

③５種類の解について

５種類の解がどのような割合で存在するのかを検証した。結果は以下のグラフのようになった。調べる数字の範囲を「5n+1」、「3n−1」ともに 1～1000、1～5000 の２種類として、操作結果の割合を円グラフにした。







調べる元の自然数を増やすと

（ｉ）「5n+1」では、操作過程が 10 億を超えるものが増える

（ii）「5n+1」では、「13 でループするもの」の割合が「１になるもの」の割合よりも相対的に多くなる

（iii）「3n−1」では、数字の範囲を変えてもそれぞれの各割合がほぼ同じになった。

④「7n+1」、「5n−1」について

操作結果は、どちらも「１になる」と「オーバーフロー」の２種類のみだった。１から一定の数までの範囲を調べた場合、右のグラフのようになり、操作結果は 100 万までの素数で調べても、「１になるもの」と「オーバーフローするもの」の２種類のみだった。

また、「5n−1」と「7n+1」の「１になる」個数を比較したところ、「5n−1」の方が多いことが分かった。

５．研究２の結果・考察

ループの現象について多項式を用いて考えた

（P, Q, R は２のべき乗、それ以外の文字は奇数とする、また A、B は不一致）

○1 度だけ n 倍して 1 を足す場合

① $\{\ An+1=PA$

コラッツ予想において解はない。

○2 度だけ n 倍して 1 を足す場合

② $\begin{cases} An+1=PB \\ Bn+1=QA \end{cases}$

これらを満たす数は以下のように求められる。

$Bn+1=QA \qquad (Bn+1)/Q=A$

$n(Bn+1)/Q+1=PB \qquad n(Bn+1)+Q=PQB$

$B(PQ-n^2)-n=Q$・・・(2)

例として，$A=27, B=611, PQ=2^{15}, n=5$ があり，これは，181m+1 の計算では，27 からスタートしてループし，181m+1 がループの中で２回行われていることになる。実際に，{181m+1} 27→4888→2444→1222→611→110592→55296→27648→13824→6912→3456→1728→864→432→216→108→54→27　となる。A=27 以外にも, A=35, 99, 611 があることが分かった。

○3 度だけ n 倍して 1 を足す場合

③ $\begin{cases} An+1=PB, \quad Cn+1=RA \\ Bn+1=QC \end{cases}$

③を同様に計算して

$C(PQR-n^3)=n^2+Rn+PR$・・・(3)　と導ける。この例は，$A=33, B=83, P=2, R=2, Q=2^5, n=5$ があり，これは，5m+1 の計算では，最初の数が 33 でループし，5m+1 がループの中で３回行われているということになる。

６．今後の展望

・調べる範囲を変化させたとき、解の割合が変化するものとしないものの比較や、変化する理由、変化しない理由について考察を深めたい。

・研究２において (2), (3) を満たす数の組み合わせを他にみつけたい。

・今回用いた自然数ｎについて、ｎを整数とした場合や実数とした場合の結果も研究していく。

調べた操作		結論
奇数	偶数	
3n＋1	n/2	全て1となり、計算回数が極端に大きい物はない
3n−1		ループという特有の性質が見られる。5と17の2種類のみ見つかった
5n＋1		ループという特有の性質が見られる。13と17の2種類のみ見つかった
7n＋1		ループせず、結果は2種類のみであった