# コラッツ予想とその拡張

## 1.アブストラクト

　コラッツ予想とは、すべての自然数に対して、奇数ならば３倍して１を足す、偶数ならば２で割るという操作を繰り返すと、有限回の操作回数で１になるという予想である。私は、このコラッツ予想とその関連した問題として、コラッツ予想の「奇数ならば３倍して１を足す」という操作を、「奇数ならば５倍して１を足す」「奇数ならば７倍して１を足す」という操作に変えたときに見られる性質について調査を行った。すると「5 倍して 1 を足す」「7 倍して 1 を足す」の操作では、ともに「計算をしていくと数が大きくなり続け、10 億を超えてしまう（オーバーフローすると呼ぶ）もの」が見られる。特に「5 倍して 1 を足す」の操作では「ループする」という特徴的な現象が見られ、コラッツ予想の操作及び「7 倍して 1 を足す」の操作とは異なる特徴があることが分かった。

## 2．はじめに

　私は、コラッツ予想の、どんな自然数でも「奇数ならば 3 倍して 1 を足し、偶数ならば 2 で割る」という操作を繰り返すと必ず 1 になるという性質、例えば「17→52→26→13→40→20→10→5→16→8→4→2→1」をとても面白いと思い興味を持ったので、このコラッツ予想とそれに関連した問題として、コラッツ予想の奇数ならば３倍して１を足すという操作を、「５倍して１を足す」「７倍して１を足す」という操作に変えたときの性質について研究を行うことにした。

## 3．研究の方法

　コラッツ予想に関する３つの研究を行った。

研究１：コラッツ予想における、操作の回数や数字の変化についての研究。

研究２：コラッツ予想の「３倍して１を足す」という操作を「５倍して１を足す」という操作に変えたときの性質の研究。

研究３：コラッツ予想の「３倍して１を足す」という操作を「７倍して１を足す」という操作に変えたときの性質の研究。

## 4. 研究の内容とその考察

### 〈１〉研究１の内容・考察

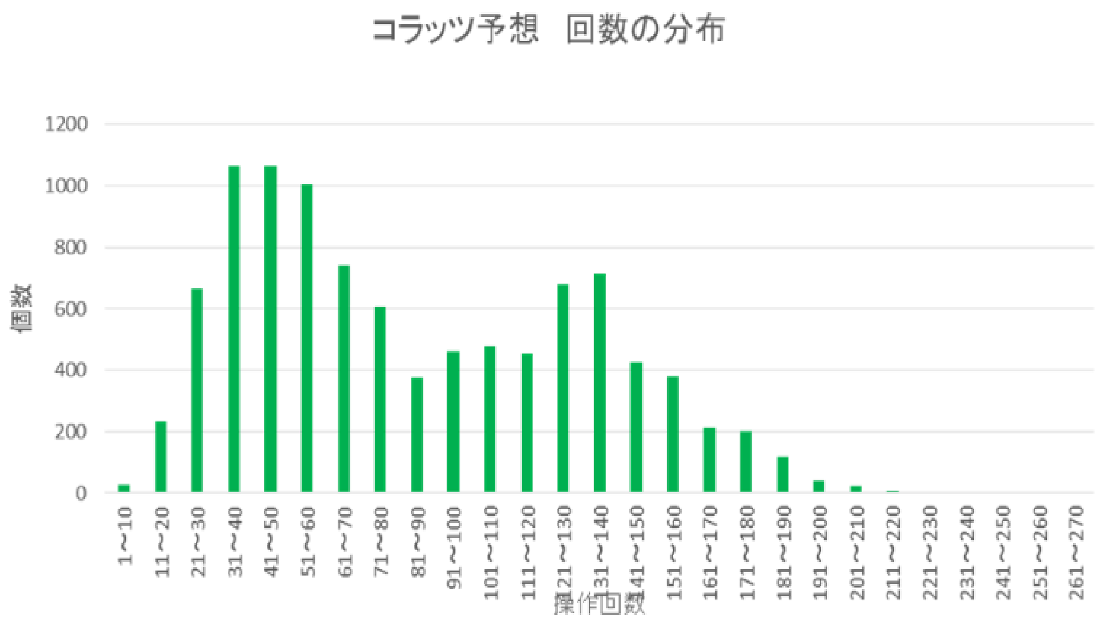
1 から 10000 までの自然数を調べたところ、操作回数は極端に大きな値はなく、調べる自然数の個数を増やしても同様のことがいえるのではないかと考えられる。

また、数字の変化について、コラッツ予想では、操作の途中で数字が 2 の累乗の値となれば必ず操作が終了する。このときどのように２の累乗の値になるのかを調べたところ、「５→16」となるものの割合が、「85→256」や「341→1024」となるものに比べて多いことが分かった。

この理由については、次のように考えた。

「5→16」となる自然数は、計算の過程で、3×2 の n 乗、5×2 の n 乗、13×2 の n 乗・・・といった数が必ず現れる。また、「85→256」となる自然数は、計算の過程で、85×2 の n 乗、113×2 の n 乗・・・といった数が必ず現れる。このように、「5→16」となる条件を満たす自然数の割合が、「85→256」や「341→1024」となる条件を満たす自然数の割合よりも大きいため、「5→16」という形で 2 の累乗の値になる割合が多いと考えられる。

また、コラッツ予想の操作回数を調べると、下のグラフを得られた。




このグラフは、横軸に操作回数を、縦軸に個数をとっている。

このグラフから、31 回～50 回辺りで操作が終了するものが最も多く、回数別

でみると 52 回で操作を終了したものが最も多く、10000 個中 190 個の自然数が５２回で操作を終了した。また、グラフでは回数 10 回ごとに区切ったところ、回数がゼロになる区間はなく、また極端に大きい回数となるものもなく、この性質は調べる自然数の範囲を広げても変わらないと考えられる。

〈2〉研究 2 の内容・考察

研究 2 では、すべての自然数が 1 になることはなく、次の性質が見られた。

ア）最終的に 1 になるもの

イ）13 でループするもの

（13→66→33→166→83→416→208→104→52→26→13）

（33→166→83→416→208→104→52→26→13）

ウ）17 でループするもの

（17→86→43→216→108→54→27→136→68→34→17）

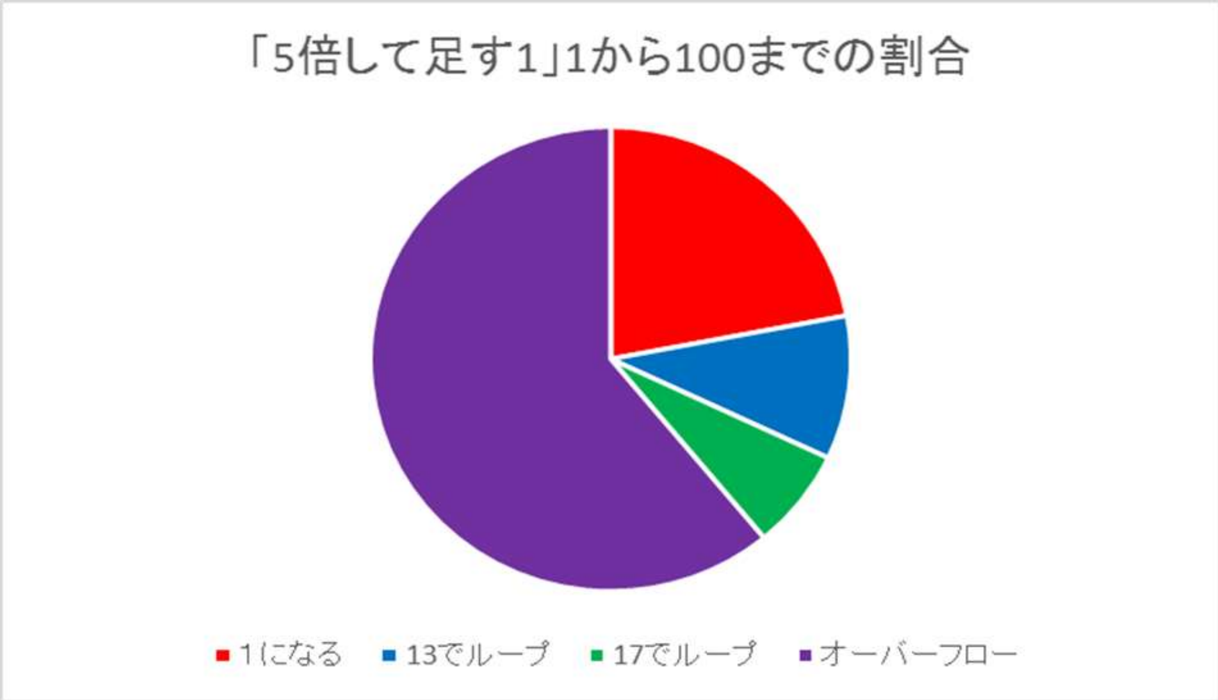
（172→86→43→216→108→54→27→136→68→34→17）

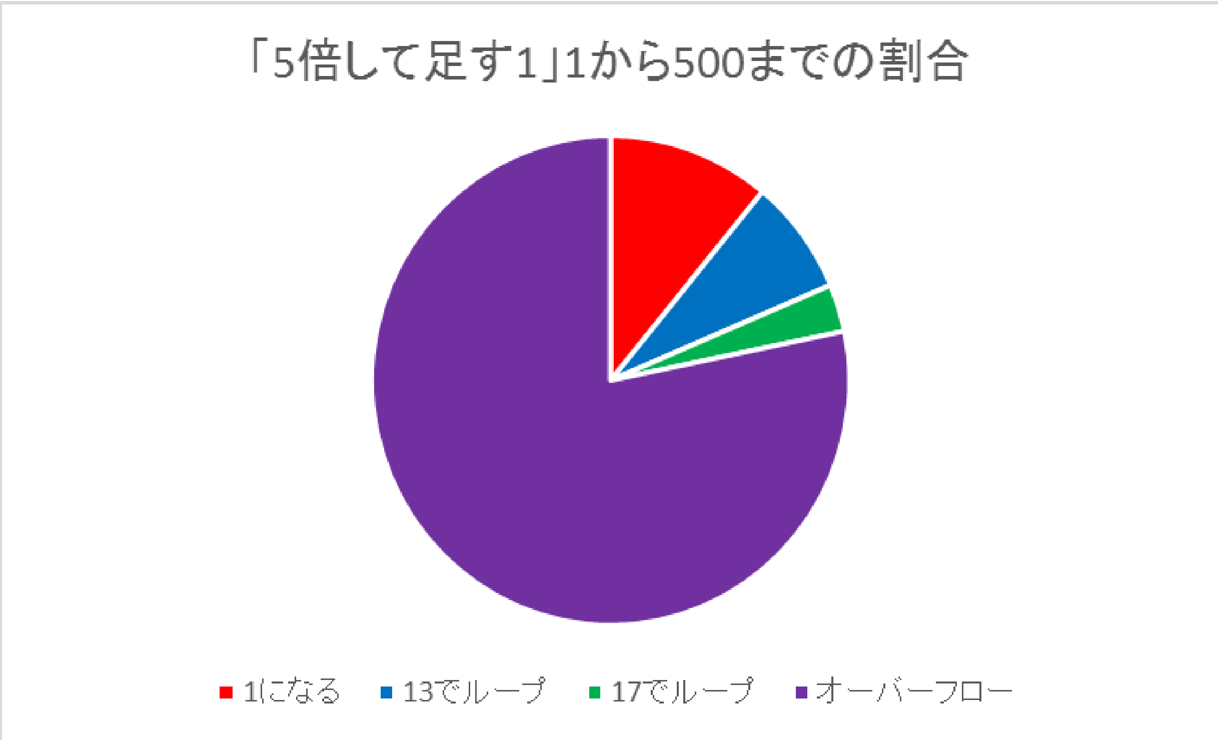
エ）オーバーフローするもの（計算の過程で数字が 10 億を超えてしまうもの）

コラッツ予想の操作を、「奇数なら 5 倍して 1 を足す」という操作に変えた場合、現段階ではこの 4 つに分類される。

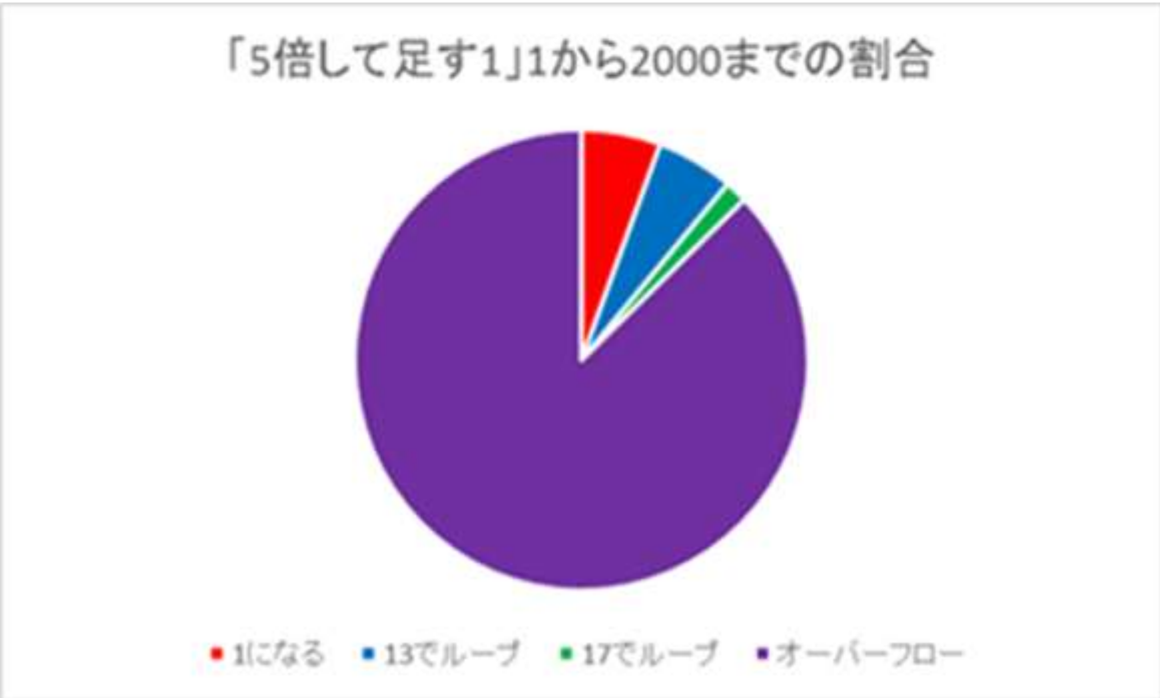
この 4 つの割合を求めると、次の円グラフが得られた。

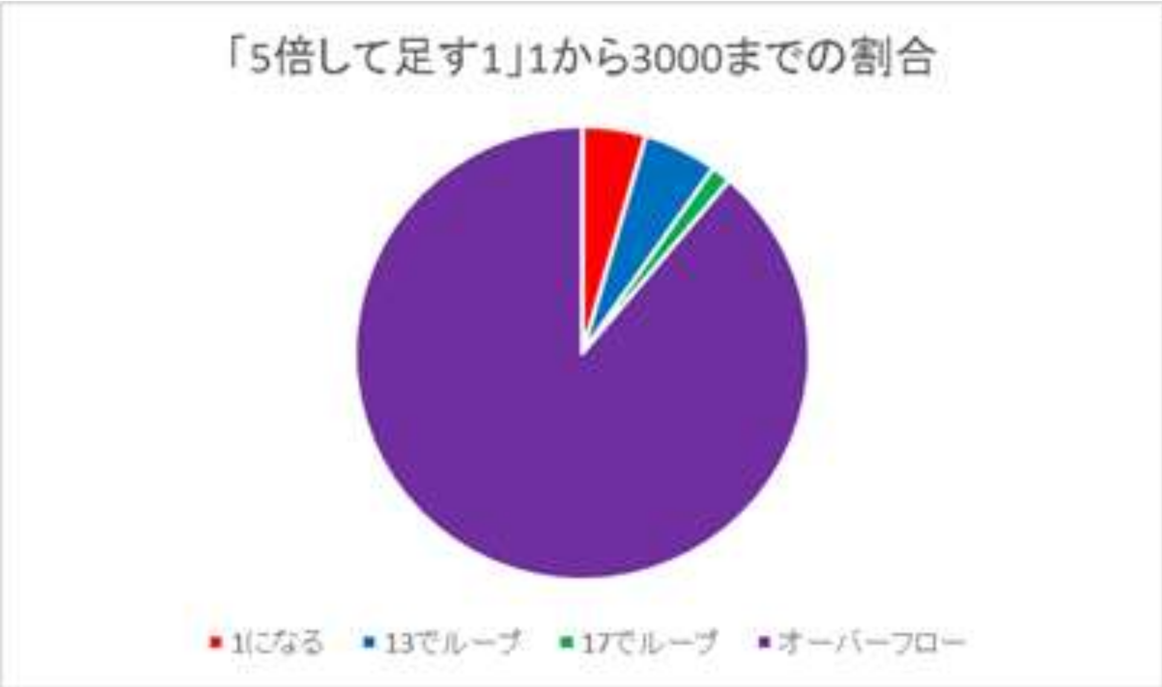
これらの円グラフは、赤が「計算して 1 になるもの」青が「13 でループするもの」緑が「17 でループするもの」「紫がオーバーフローするもの」の割合を表しており、それぞれ「1～100」「1～500」「1～1000」「1～2000」「1～3000」の各範囲でまとめている。


「5倍して足す1」1から100までの割合
1になる
13でループ
17でループ
オーバーフロー


「5倍して足す1」1から500までの割合
1になる
13でループ
17でループ
オーバーフロー


「5倍して足す1」1から1000までの割合
1になる
13でループ
17でループ
オーバーフロー


「5倍して足す1」1から2000までの割合
1になる
13でループ
17でループ
オーバーフロー




これらの円グラフから次のことがいえる。

ア）調べる数の範囲を広げると、オーバーフローするものの割合が大きくなる。

イ）調べる数の範囲を広げると、「13 でループするもの」の割合が、「最終的に 1 になるもの」「17 でループするもの」に比べて大きくなる。

また、操作の過程で現れた奇数を書き並べていくと、次のことが分かった。

「現れる奇数を順番に書き並べたとき、ある奇数に対して、次に現れる奇数が、その奇数より大きいとき、一の位は必ず 3 または 9 である。」

例えば、7 を例にとると、

7, 23, 29, 73, 183, 229, 573, 1433, 3583, 4479, 5599, 6999, 8749, 21873, 54683, 34177, 85443, 26071, 66753, 166883, 52151, 65189, 162973, 407433, ・・・

このように、奇数の値がその前のものより大きくなっていると、一の位は 3 か 9 になっていることが分かる。これは、次のように証明した。

証）ある任意の奇数 $N_0$ の次に現れる奇数を $N_1$ とする。

$N_0 \equiv 1, 3, 5, 7, 9 \pmod{10}$ であるから、$5N_0+1 \equiv 6 \pmod{10}$

ここで、$2^2=4$, $2^3=8$ であるから、$N_0<N_1$のとき、$N_0$を５倍して１を足した後、２で割る回数は２回以下である。よって、

$5N_0+1=10M+6$,　$N_1=10N+P$

（M, Nは０以上の整数, Pは一桁の奇数）と置くと、

（ｉ）２で１回割れるとき、$2N_1=5N_0+1$

すなわち、

$20N+2P=10M+6$

よって、　$2P\equiv 6 \pmod{10}$ を満たす一桁の奇数Pを求めると、

$P=3$　が求まる。

（ⅱ）２で２回割れるとき、（ｉ）と同様に考えると、

$4N_1=5N_0+1$　すなわち、

$40N+4P=10M+6$　から、

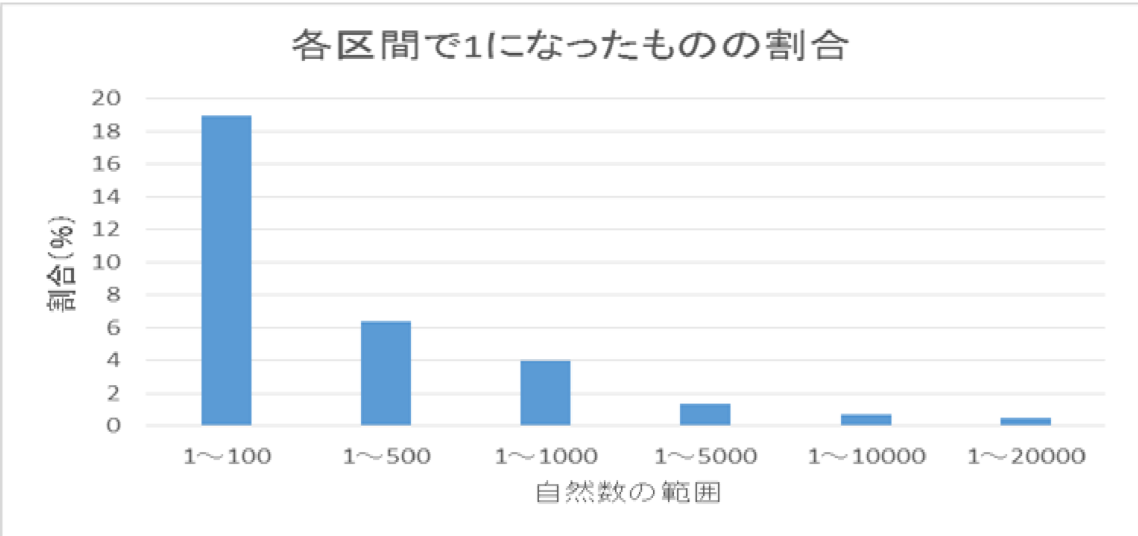
$4P\equiv 6 \pmod{10}$ を満たす一桁の奇数Pを求めると、

$P=9$　が得られる。

（ｉ）（ⅱ）の結果より、奇数を並べたときに、ある奇数がそのひとつ前の奇数よりも大きくなるとき、一の位は必ず３または９である。(終)

### 〈3〉研究３の内容・考察

研究３では、１～20000 までの研究２のような「ループする」などといった性質は見られず、「最終的に１になる」ものと「オーバーフローする」もの２種類しか見つかっていない。また、これも「5 倍して１を足す」の操作と同様に、調べる自然数の範囲を大きくすると、オーバーフローするものの割合が大きくなっていった。

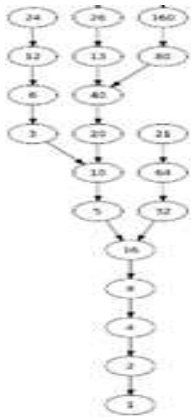


## ５．今後の展望

〈1〉研究 2 でみられた「ループする」という性質について深く考察する。

〈2〉オーバーフローしたものについて、計算を続け、10 億以上の大きな数でのループが存在するかを調べる。

〈3〉右の表は、コラッツ予想の操作における数字の変化を表したものであるが、コラッツ予想の操作を逆から辿っていくと発見があるかもしれないので、これを考察し、また研究 2、研究 3 でも同様の調査を行う。



## 6. 参考


・マスフェスタ資料

・Wikipedia

・イアン・スチュアート　数学を変えた 14 の偉大な問題　フェルマーの最終定理からリーマン予想まで　（訳：水谷淳　SB Creative）