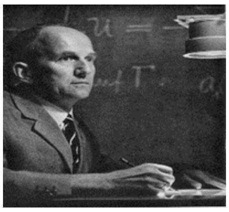
コラッツ予想

56 番　SS 科学部　2 年　矢野一義

1．研究の動機

もともと整数の分野に興味を持っており、整数分野の研究を行いたいと思っていた。数学の課題研究の資料で見つけたコラッツ予想の不思議な性質に興味を持ったので、この研究を行うことにした。

2．コラッツ予想とは



コラッツ予想とは、ローター・コラッツの唱えた未解決問題である。その方法は任意の自然数に対して、奇数であれば 3 をかけて 1 を足す、偶数であれば 2 で割るという操作で、どんな自然数も必ず 1 になる。一例は　13→40→20→10→5→16→8→4→2→1

3．研究の方針について

コラッツ予想の操作において以下の４つの研究を行った。

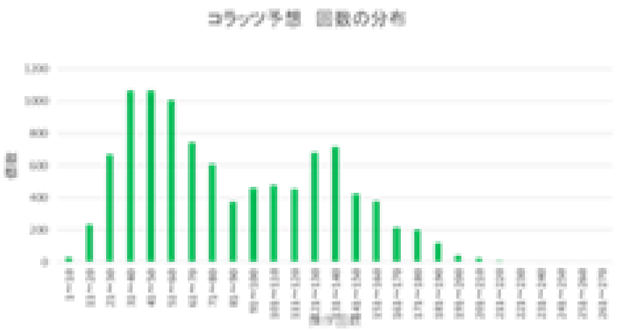
研究１：計算過程の数字の移り変わりの様子と操作回数について調査

研究２：「３をかけて１を足す」という操作を「５をかけて１を足す」に変化させて、どのような結果になるか調査

研究３：「３をかけて１を足す」という操作を「７をかけて１を足す」に変化させて、どのような結果になるか調査

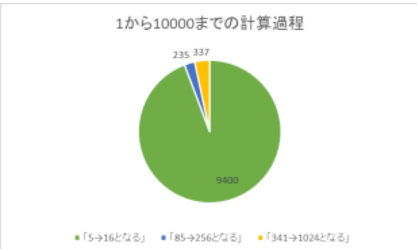
研究 4：階差数列をとり、その性質の調査

4．研究１の結果・考察



①計算過程の数字の移り変わりについて

計算過程のうち「5→16」が「85→256」や「341→1024」よりもはるかに多い。



②操作回数について

グラフを見ると、３０回～５０回で１になるものが最も多いことが分かる。また、最多は５２回で、１万個中 190 個の数が、５２回で操作を終えた。また、外れ値のような極端に大きい回数は見られなかった。

5．研究２の結果・考察

①計算結果について

全ての自然数が 1 にはならず、最終結果は

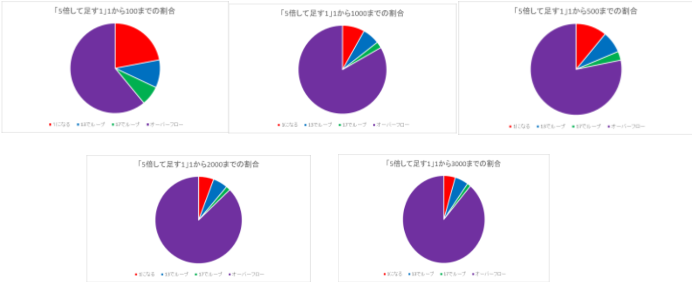
（i） 1 になる

（ii） 13 でループする（13→66→33→166→83→416→208→104→52→26→13）

（iii） 17 でループする（17→86→43→216→108→54→27→136→68→34→17）

（iv） 計算過程で 10 億を超える（オーバーフローした）の 4 種類が確認された。

4 種類の解の存在割合を検証し、右上のグラフのようになった。
調べる元の自然数を増やすと
（i）計算過程が 10 億を超えるものが増える。
（ii）「13 でループするもの」の割合が多くなる。

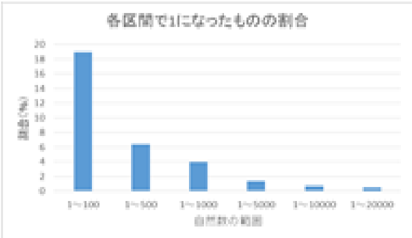


・「5 倍して 1 を足す」操作で、奇数を羅列したところ次の結果が得られた。

「奇数を羅列した時、その数が前に現れた奇数よりも大きくなっていれば、一の位は必ず 3 か 9 である。」･･･①

①の証）ある任意の奇数 N_0 の次に現れる奇数を N_1 とする。
$N_0 \equiv 1, 3, 5, 7, 9 \pmod{10}$ であるから、$5N_0+1 \equiv 6 \pmod{10}$
ここで、$2^2=4$, $2^3=8$ であるから、
$N_0<N_1$ のとき N_0 を５倍して１を足した後２で割る回数は２回以下である。よって、
$5N_0+1=10M+6$,　$N_1=10N+P$（M, N は０以上の整数, P は一桁の奇数）と置くと、
（i）２で１回割れるとき、$2N_1=5N_0+1$　すなわち $20N+2P=10M+6$
よって、　$2P \equiv 6 \pmod{10}$ を満たす一桁の奇数 P を求めると、$P=3$　が求まる。
（ii）２で２回割れるとき、（i）と同様に考えると、
$4N_1=5N_0+1$　すなわち、$40N+4P=10M+6$　から、
$4P \equiv 6 \pmod{10}$ を満たす一桁の奇数 P を求めると、$P=9$　が得られる。
（i）（ii）の結果より、奇数を並べたときに、ある奇数がそのひとつ前の奇数よりも大きくなるとき、一の位は必ず３または９である。(終)

6．研究３の結果・考察



1 から 10000 までの範囲を調べた場合、計算過程が 10 億を超えたものは 9918 個、1 になったものは 82 個となった。結果は 100 万までの素数で調べたところでは、この 2 種類のみだった。ループするものは見つかっていない。

7．研究 4 の結果・考察

7 と 61 についてコラッツ予想の操作で現れる数を書きならべて、そのときの性質をしらべたが、元の数列を表すような数列は発見できなかったため、今回は項が一つになるまで階差をとり続け、最後に残った数を求めた。以下に、61 の場合を例に挙げる。

61　184　92　46　・・・　5　16　8　4　2　1

123　−92　−46　−23・・　11　−8　−4　−2　−1

・

・

−6173873　4226239

10400112

また、$10400112=2^4\times3^2\times72223$ であり、また 7 の場合は最終的に 210958 が得られ、$210958=2\times11\times43\times223$ であった。最終的に得られる数についても、法則性は見つけられていない。

8．考察

「5 倍して 1 を足す」操作では、興味深い結果を得ることができた。
「7 倍して 1 を足す」操作で法則が見つからないのは、「3 倍して 1 を足す」「5 倍して 1 を足す」に比べて数の変化が大きいためと考えている。

9．今後の展望

「５をかけて１を足す」の操作でのみ見られたループという現象について考察を深めたい。「５をかけて１を足す」と「７をかけて１を足す」の１０億以上の数が計算過程で出てくるループについても考察を深めたい。コラッツ予想の計算を逆から遡ることができれば、その特徴について詳しい説明ができるのではないかと考えられる。

10. 参考文献

・イアン・スチュアート　数学を変えた 14 の偉大な問題　フェルマーの最終定理からリーマン予想まで　（訳：水谷淳　SB Creative）

・素因数分解　高精度計算サイト（keisan.casio.jp）

・マスフェスタ資料