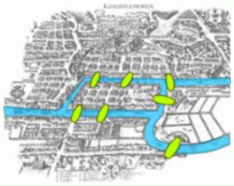
n 筆書き

58 番　SS 科学部 2 年　三苫凌

1．はじめに



ケーニヒスベルクの橋の問題(右図)で一筆書きに興味を持ち、一筆書きできない図形には規則性があるのか疑問に思い、研究した。

○研究で用いたグラフ理論の用語の説明

グラフ G：点集合 V と辺集合 E からなる図形全般のこと。

部分グラフ：あるグラフから辺と点を部分的にとったグラフ。

点の次数：点から出ている辺の数。また、次数が奇数の点を**奇点**、次数が偶数の点を**偶点**という(以下奇点を○、偶点を●とする)。一つのグラフ内にある奇点の数は偶数個であることが知られている(握手補題)。

重み付きグラフ：辺に重みづけをしたグラフ。距離や費用を表せる。

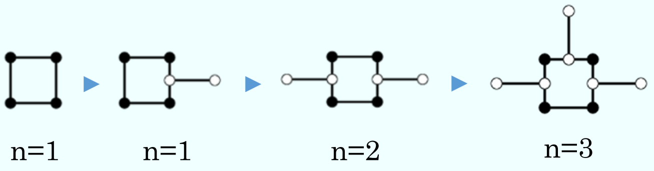
2．研究の内容

2－1　(参考)一筆書きの可否についての定理

定理：一筆書きできるグラフであるための必要十分条件は、すべての点が偶点、または、2 つだけ奇点の場合である。(2 つだけ奇点のとき、これらが始点・終点になる。)

2－2　一筆書きできない図形について(以下、n 筆書きとする)

グラフの奇点の数によって n の数が変わることに注目した。



→奇点を 2 つ追加していくごとに n が 1 ずつ増える

そこで、n=(奇点の数)÷2 と予想し、証明をした。

証明)グラフ G において任意の奇点 x,y を選び、x,y を始点・終点とする道をp_1としたとき、p_1を適切に選ぶと、奇点の数が 2 減ったグラフ(G-p_1)とp_1に分かれる。以降も同じように、p_2、p_3・・・と選んで分割していくと、p_1+p_2+・・・+$p_{\frac{a}{2}}$と分けられる。このとき、分割したそれぞれの$\frac{a}{2}$個のグラフは一筆書きができるため、n=$\frac{a}{2}$となる。　□

2－3　n 筆書きの問題作成

n 筆書きができる重み付きグラフを n 個の一筆書きができる部分グラフに分割する。そのとき、重みが n 等分に近いように分けられるもの(重みの最大値が最も小さくなるもの)を求めるにはどうすればよいか。

今回は、この問題を効率よく解くための手順(アルゴリズム)を考えた。また、アルゴリズムの計算量が O(n^k)、つまり多項式時間以内で解けるものを考えることにした。

◆方法 1：総当りのときの大まかな計算量を考える

2n 個の奇点を 2 つずつに分ける組合せが$\dfrac{\frac{(2n)!}{2!\cdot n}}{n!} = \dfrac{(2n-1)!}{n!}$通り。このそれぞれについて辺の選び方も複数あるため、最適解を出すには多項式時間を超える計算量になると予想し、次に近似解が出せないか考えた。

ここで、この問題の類題である郵便配達問題*で用いられるアルゴリズムの一つであるダイクストラ法を改変して用いることを考えた。

＊郵便配達問題：グラフ内のすべての辺を最低一回通ってすべての辺を回り、元に戻ってくるときの最短距離を求める問題

ダイクストラ法: ある始点から、最短距離で行けるところを順番に確定していく方法。一度確定したところには戻る必要がない。

改変ダイクストラ法：ある始点から、分岐点すべてについて距離を記憶していき、最適値に近くなった時点で終了する。計算量は求めていないが、調べなければならないパターン数はもとのダイクストラ法と比べて増えている。

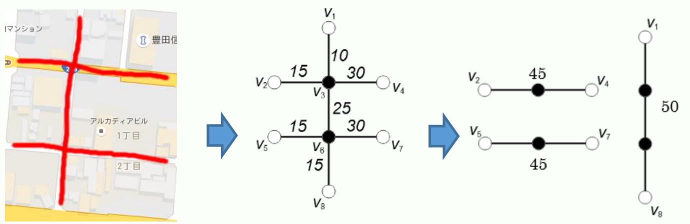
◆方法 2：貪欲法(段階ごとの最適解を順番に出していく方法)

以下の操作①、②を、全て一筆書きに分割できるまで繰り返す。

① (現在のグラフの重みの和)÷(現在の n)を最適値 α とする。

② 現在のグラフ内で、最も重みが α に近く、奇点が始点・終点の一筆書きを 1 つ取り除く。

実行例



考察：グラフが複雑になると解の精度も悪くなると予想している。

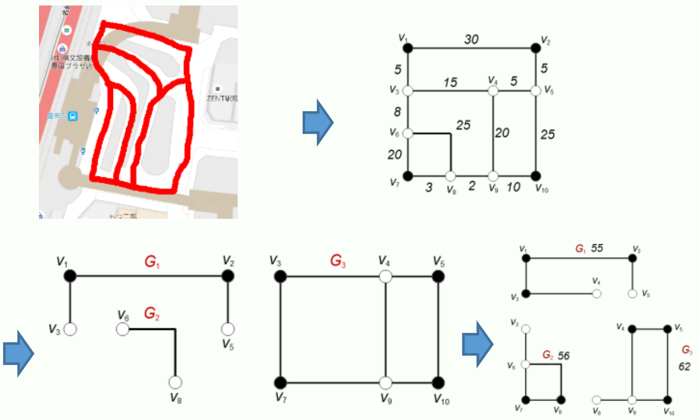
◆方法 3：局所探索法(初めのランダムな解を改善していく方法)

① 与えられたグラフGをランダムに n 個の一筆書きができる部分グラフに分け、それぞれをG_1、G_2、・・・、G_nとする。

② 2 つの部分グラフを選び、その 2 つのグラフの重みが 2 つの平均に近づき、かつ一筆書きであるように辺を組み替える

③ ②ができなくなるまで繰り返す。

実行例



考察：手計算でやったとき、貪欲法より計算面での利点を感じた。

3．まとめ・今後の課題と展望

n の数を求める考え方を用いて問題を考察した。解法を考えたが、近似率の良いアルゴリズムを見つけるのは難しいのではないかと考えている。

C 言語等を利用したコンピュータでの実装を行うことで、計算量を予想していきたい。

4．参考文献

仁平政一・西尾義典，2005，「グラフ理論|序説」，プレアデス出版

茨木俊秀・石井利昌・永持仁, 2010, 「グラフ理論連結構造とその応用」, 朝倉書店

浅野哲夫・和田幸一・増澤利光, 2003, アルゴリズム論, オーム社