自然界に愛された１　～ベンフォード則の不思議～

愛知県立豊田西高等学校２年　高橋直希、清水遥介

1　はじめに

(1)　ベンフォード則とは

数字の最高桁が一様な分布ではなく、1が一番多く２，３，４,・・・と順に少なくなっていくという法則である。

(2)研究の目的

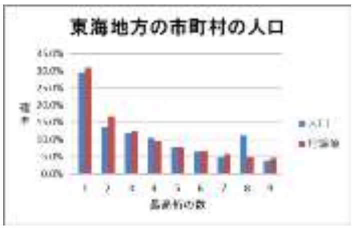
(ア)身近な事柄についてベンフォード則が成立するかについて調査する。今回選挙の候補者の得票数や、世界の国、東海地域の人口・面積においてベンフォード則が成立するのかを調べた。東海地域の人口・面積については最高位から２桁目の数がベンフォード則に従うかも考察した。χ^2 検定を用いて測定値と理論値との比較を行った。

(イ)ベンフォード則の成立する理由を理解する。

(ウ)10 進数以外では規則性があるのか、また、どのような分布を示しているのかを世界の国の人口・面積において調査する。

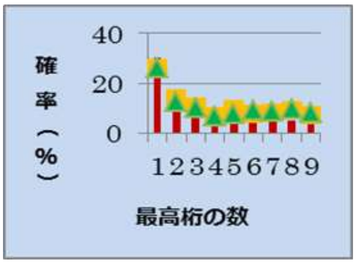
2　研究の方法・結果

(1)世界の国の人口、面積で最高桁の１から９の数の分布を調査し、χ^2 検定を行った。今回、対立仮説はベンフォード則に従う、帰無仮説は従わないとした。χ^2 の値が 4.46、1.12 となり棄却域に入ったので、ベンフォード則に従う。



(2)東海地方の市町村の人口・面積でも(1)と同じようにχ^2 検定を行ったところχ^2 の値が 8.27、1.49 となり棄却域に入ったのでベンフォード則に従う。

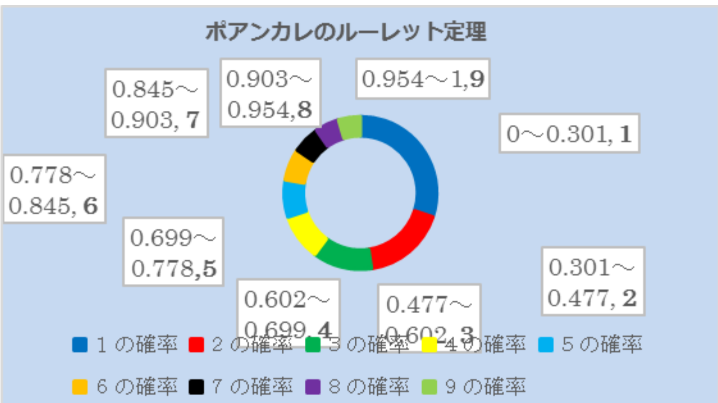
(3) ア)第 47 回の衆議院選挙の小選挙区において各候補者数の得票数とベンフォード則の理論値と比較を行った。そして、χ^2 検定を用いて検証した。値は 122 となり、棄却域に入らなかったので、ベンフォード則に従わない。



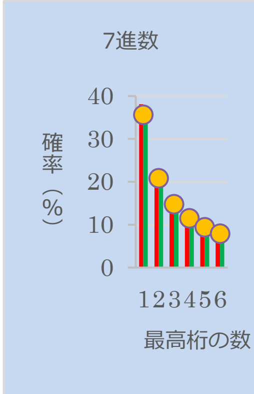
イ)ア)でχ^2 検定の値が棄却域に入らなかったので、さらにもう一年分のデータで検証を行った。値は 105 となり、棄却域に入らなかったので、ベンフォード則に従わない。

(4)ベンフォード則の説明

ベンフォード則で求められる数値の分布になる理由は、ポアンカレのルーレット定理で説明することができる。十進数を十倍するごとに一桁上がる構造を円に表し、それを１周とする。さらに十倍すると２周すると考える。1や 10、100 は対数関数$\log_{10} x$で円周の周回数と対応できる。１から９までの１桁の数は、０周から１周の間にあることになる。

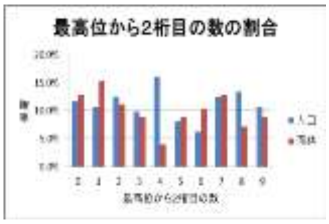


(5)世界の国の人口・面積のＮ進数(Ｎ＝3,4,…9)における調査



次に、世界の国の人口、面積において３進数から９進数の最高桁の数の分布について調査した。各進法での最高桁の分布は$\log_m(N+1)-\log_m(N)$（mは進数の数、Ｎは最高桁の数に対応している）と仮説をたてた。予測値が正しいことを統計的に示すためにχ^2 検定を行った。その結果、仮説が正しいことが証明された。

(6)最高位から二ケタ目も同じようにχ^2 検定を行ったところ、χ^2 の値が 48.4、29.6 となり棄却域に入らず、ベンフォード則に従わなかったが、ルーレット定理に基づいた最高位を固定して二ケタ目の数の割合を考え、理論値とのずれを調べるためにχ^2 検定を行ったところ、χ^2 値は 9.62 となり、その理論値に従った。



(7)これまでの結果からベンフォード則にのっとるデータを上２桁が 10 から 99 のものがすべて出てくるまで集めると上２ケタが小さい物ほど多く集まることになる。つまり、ベンフォード則にのっとるデータどうしの積を集めたデータは上２ケタが小さいもの同士の積が多く出現し、上２ケタが大きいもの同士の積が一番少なくなる。この画像は 99×99 の九九表のようなものを最高位の数で色分けたものであり、この縦横をそれぞれベンフォード則にのっとるデータとみると左上にある数ほど出現確率が大きくなるといえる。この画像から最高値が１である数(黄)が一番多く出現していることから、ベンフォード則にのっとるデータどうしの積を集めたデータはベンフォード則にのっとる。

図 九九表の最高位の数の色分け

3　まとめ・今後の展望

(1)人口、面積の最高桁の分布は、χ^2 検定からベンフォード則に従っていることが言えるが、選挙では棄却域に入らなく、二回とも同じような分布を示したので、特有の分布が存在していると考察した。

(2) 他の進法について最高桁の数の分布を調査したところ、他の進法でも最高桁の分布が一様なものでなく特定のものになっているので、ベンフォード則を応用できると考察した。

(3)最高位から二ケタ目の分布は、二ケタ目特有の分布になっていると考察した。

(4)素数のべき乗を集めたデータはワイルの定理によってベンフォード則にのっとることが言えることが分かっている。しかし、まだワイルの定理については深く知らないので今後はそのような確率論的なアプローチもしていきたい。

4　参考文献

１）数学で身に着ける柔らかい思考力　ダイヤモンド社
　ロブ・イースタウェイ　ジェレミー・ウィンダム　著　水谷淳　訳
２）例題で学ぶ統計的方法　創成社　井上洋　野澤昌弘　著