エキスパート問題1

△ABCの外心Oから直線BC,CA,ABに垂線を引き、それぞれの交点をP,Q,Rとする。次の問いに答えよ。

(1) これらを図示せよ。

(2) 円周角と中心角にはどのような関係があるか。

(3) △OBCと△OCAと△OABはどのような三角形か。

(4) P,Q,Rはどのような点か。

エキスパート問題２

△ABCの外心をOとし、辺ABの中点をD、△ACDの重心をEとする。次の問いに答えよ。

ただし、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$で表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$と$\vec{c}$で表せ。

(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=0$であることを示せ。

エキスパート問題３

△ABC と点 P に対して，等式 $6\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っている。

(1) 点 P の位置をいえ。

(2) 面積比 △PBC：△PCA：△PAB を求めよ。

エキスパート問題４

△OABにおいて、条件$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1$、$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\sqrt{3}$、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$のとき、
∠AOBの大きさθを求めよ。

パフォーマンス課題

△ABCの外心Oから直線BC、CA、ABに垂線を引き、交点をP、Q、Rとするとき、
$\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AQ}+3\overrightarrow{AR}+6\overrightarrow{OA}=\vec{0}$が成立しているとする。

(1) $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$の関係式を求めよ。

(2) ∠Aの大きさを求めよ。

エキスパート問題１_解説

△ABCの外心Oから直線BC,CA,ABに垂線を引き、それぞれの交点をP,Q,Rとする。次の問いに答えよ。

(1)　これらを図示せよ。

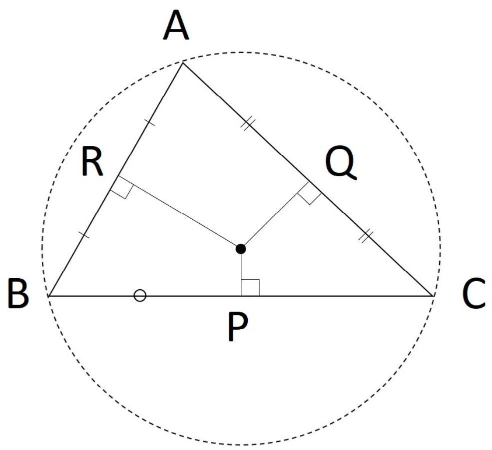
(2)　円周角と中心角にはどのような関係があるか。

(3)　△OBCと△OCAと△OABはどのような三角形か。

(4)　P,Q,Rはどのような点か。

解説

(1)



(2)　円周角は中心角の半分の角度である。

(3)　線分OA，OB，OCの長さは外心Oを半径とする外接円の半径の長さと等しいため、
△OBCと△OCAと△OABは二等辺三角形である。

(4)　外心Oから直線BC，CA，ABに垂線を引いた交点がP,Q,Rであるため，
点Pは線分BCの中点，点Qは線分CAの中点，点Rは線分ABの中点である。

エキスパート問題２_解説

△ABCの外心をOとし、辺ABの中点をD、△ACDの重心をEとする。次の問いに答えよ。

ただし、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$で表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$と$\vec{c}$で表せ。

(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=0$であることを示せ。

解説

(1)　辺ABの中点がDであるため、

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

(2)　△ACDの重心がEであるため、

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3}$$

$$=\frac{\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}{3}$$

$$=\frac{3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{6}$$

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{12}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})\cdot(3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$$

$$=\frac{1}{12}(3|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-4|\vec{c}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{c})\qquad\cdots①$$

Oは△ABCの外心であるため、

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\quad\text{つまり}\quad|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|\qquad\cdots②$$

また　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}$　…③

①に②，③を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=0$$

エキスパート問題３_解説

△ABC と点 P に対して，等式 $6\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ が成り立っている。

(1)　点 P はどのような位置にあるか。

(2)　面積比 △PBC：△PCA：△PAB を求めよ。

解説

(1)　与えられた等式から　　$6\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$

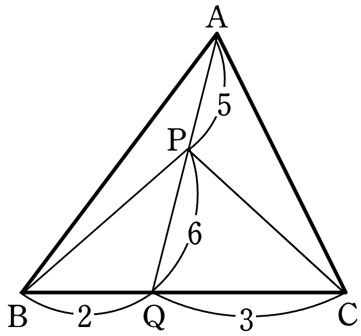
よって　　$11\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{11}=\dfrac{5}{11}\times\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$

$\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ とおくと　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{5}{11}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

よって　　BQ：QC＝2：3，AP：PQ＝5：6

したがって，辺 BC を 2：3 に内分する点を Q とすると，点 P は線分 AQ を 5：6 に内分する点である。



(2)　△PBQ：△PCQ＝BQ：QC＝2：3

よって，△PBQ＝$2S$ とすると　　△PCQ＝$3S$

ゆえに　　　△PBC＝$2S+3S=5S$

△PCQ：△PCA＝6：5 であるから　　△PCA＝$\dfrac{5}{6}\times3S=\dfrac{5}{2}S$

△PBQ：△PAB＝6：5 であるから　　△PAB＝$\dfrac{5}{6}\times2S=\dfrac{5}{3}S$

したがって　　△PBC：△PCA：△PAB＝$5S:\dfrac{5}{2}S:\dfrac{5}{3}S=6:3:2$

エキスパート問題４_解説

△OABにおいて、条件$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$、$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{3}$、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$のとき、∠AOBの大きさ$\theta$を求めよ。

解説

与えられた等式から　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

両辺二乗すると　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

変形すると　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

条件より　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$、$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{3}$　なので

与えられた等式は　$1+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+1=3$　となり

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}$

内積の定義より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$

計算すると　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

したがって　$\theta=60^\circ$

パフォーマンス課題_解説

△ABCの外心Oから直線BC，CA，ABに垂線を引き、交点をP、Q、Rとするとき、
$\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AQ}+3\overrightarrow{AR}+6\overrightarrow{OA}=\vec{0}$が成立しているとする。

(1) $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$の関係式を求めよ。

(2) ∠Aの大きさを求めよ。

(解説)

(1) 与えられた等式を変形して　$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}+2(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA})+3(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA})+6\overrightarrow{OA}=\vec{0}$

つまり　$\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OR}=\vec{0}$　…①

外心Oから直線BC，CA，ABに垂線を引いた交点がP,Q,R であるため，
点P は線分BC の中点，点Q は線分CA の中点，点R は線分AB の中点であるため，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\qquad \overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\qquad \overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

これを①に代入すると　$5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

変形して　$4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=-5\overrightarrow{OA}$

二乗すると　$|4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}|^2=|-5\overrightarrow{OA}|^2$

変形すると　$16|\overrightarrow{OB}|^2+24\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+9|\overrightarrow{OC}|^2=25|\overrightarrow{OA}|^2$　…②

Oは△ABCの外心であるため

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$　…③

③を②に代入すると　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

$\overrightarrow{OB}$ と$\overrightarrow{OC}$ のなす角をθ とすると

内積の定義より　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta$

計算すると　$\cos\theta=0$

よって　$\theta=90^\circ$

円周角は中心角の半分の角度であるので

∠A ＝ 45°